
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01013844 4

COURS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET INTÉGRAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
10640 Quai des Augustins, 55.

COURS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL,

PAR J.-A. SERRET,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME SECOND.

CALCUL INTÉGRAL.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1886

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SECOND.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET DES INTÉGRALES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

CHAPITRE IV.

DE LA QUADRATURE ET DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

CHAPITRE V.

DE LA CUBATURE DES SOLIDES ET DE LA QUADRATURE DES SURFACES COURBES. — DES INTÉGRALES MULTIPLES.

CHAPITRE VI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

CHAPITRE VII.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

CHAPITRE VIII.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

CHAPITRE X.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES SÉRIES OU PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

CHAPITRE XI.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES OU AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

CHAPITRE XII.

DE LA MÉTHODE DES VARIATIONS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

COURS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET INTÉGRAL.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

Objet du Calcul intégral.

406. Nous avons fait connaître, dans le Calcul différentiel, les règles au moyen desquelles on obtient les différentielles des divers ordres des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes; nous avons montré en outre qu'en combinant des équations données où figurent plusieurs variables, avec celles qu'on en déduit par la différentiation, on peut éliminer certaines quantités arbitraires et former ce que nous avons nommé des *équations différentielles* ou des *systèmes de telles équations*.

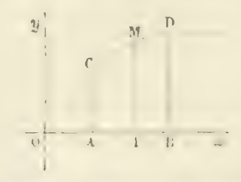
Le Calcul intégral a en vue les problèmes inverses. Il a pour objet : 1° la détermination des fonctions d'après leurs différentielles; 2° la recherche des relations qui lient entre elles plusieurs variables assujetties à satisfaire

à des équations différentielles données. Le premier problème est évidemment compris dans le second, et il en constitue le cas le plus simple; un grand nombre de questions importantes viennent s'y rattacher, et il sera pour nous le sujet d'une étude approfondie.

Nous devons faire remarquer ici que nous avons eu plusieurs fois l'occasion, dans le Calcul différentiel, de traiter des questions qui appartiennent proprement au Calcul intégral. Ces questions, que nous avons pu résoudre au moyen des propriétés fondamentales des fonctions dérivées, sont une utile préparation aux théories que nous avons à exposer.

Des intégrales indéfinies et des intégrales définies

407. Soit $f(x)$ une fonction réelle d'une variable indépendante x, que nous supposerons continue pour les valeurs réelles de x comprises entre deux limites x_0 et X. Nous avons vu (n° 187) qu'il existe toujours une fonction ayant pour différentielle $f(x)\,dx$; effectivement, si l'on trace deux axes rectangulaires Ox, Oy, que l'on construise la courbe CMD dont l'ordonnée y soit égale à $f(x)$, et que l'on mène deux ordonnées CA, MP qui répondent à deux abscisses comprises entre x_0 et X, l'une de ces abscisses étant déterminée et l'autre x étant regardée



comme variable, l'aire ACMP sera une fonction de x, qui a pour dérivée $f(x)$ et pour différentielle $f(x)\,dx$.

D'ailleurs, pour que deux fonctions aient la même dif-

férentielle, il faut et il suffit que la différence de ces fonctions soit constante; donc il existe une infinité de fonctions ayant pour différentielle $f(x)\,dx$, et ces fonctions ne diffèrent entre elles que par une constante. Notre construction nous indique l'existence de toutes ces fonctions, puisque l'ordonnée fixe CA, à partir de laquelle est comptée l'aire ACMP, a été choisie arbitrairement; si, au lieu de cette ordonnée, on en prend une autre C'A', on obtiendra une aire nouvelle A'C'MP qui aura encore $f(x)\,dx$ pour différentielle.

La fonction dont la différentielle est $f(x)\,dx$ renferme ainsi une constante arbitraire; elle est dite l'*intégrale indéfinie* ou simplement l'*intégrale de la différentielle $f(x)\,dx$*, et on la représente par

$$\int f(x)\,dx.$$

D'après cela, si $F(x)$ désigne l'une des valeurs de cette intégrale, c'est-à-dire l'une des fonctions qui ont $f(x)\,dx$ pour différentielle, on aura

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1}$$

C étant une constante arbitraire.

408. Le problème qui a pour objet l'intégration d'une différentielle donnée deviendra déterminé si l'on ajoute la condition que l'intégrale se réduise à zéro pour une valeur donnée x_0 de x. Effectivement, la constante C de la formule précédente devra être telle, que l'on ait

$$F(x_0) + C = 0,$$

et il viendra

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(x_0); \tag{2}$$

cette expression sera celle de l'aire ACMP considérée

plus haut, si l'on suppose que l'ordonnée fixe CA réponde à l'abscisse x_0.

Si l'on donne à x la valeur déterminée X, l'intégrale (2) prendra une valeur déterminée égale à

$$F(X) - F(x_0);$$

on la représente par

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

et elle est dite l'*intégrale définie de la différentielle* $f(x)\,dx$ prise à partir de $x = x_0$ jusqu'à $x = X$; ainsi l'on a

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Cette intégrale a pour valeur l'aire ACDB, comprise entre la courbe dont $f(x)$ est l'ordonnée, l'axe des x et les ordonnées CA, DB qui répondent aux abscisses x_0 et X. Or nous avons vu (n°s 10 et 188) que si l'on divise l'intervalle $X - x_0$ en n parties égales ou inégales représentées généralement par Δx, puis que l'on construise des rectangles intérieurs et extérieurs ayant pour bases ces diverses parties et pour hauteurs les ordonnées correspondantes de la courbe CD, la somme de ces rectangles $f(x)\,\Delta x$ tend vers une limite égale à l'aire ACDB, quand les Δx tendent vers zéro et que leur nombre augmente indéfiniment. Il en résulte que l'on a

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \sum_{x = x_0}^{x = X} f(x)\,\Delta x,$$

ce qui exprime la proposition suivante :

L'intégrale définie de la différentielle $f(x)\,dx$ *prise*

de $x = x_0$ *à* $x = X$ *est la limite vers laquelle tend la somme des valeurs que prend la différentielle* $f(x)dx$ *ou* $f(x)\Delta x$, *quand* x *varie de* x_0 *à* X *en prenant des accroissements successifs infiniment petits.*

C'est en raison de cette propriété qu'on a choisi le signe $\int$, initiale du mot *somme*, pour représenter les intégrales.

Le raisonnement que nous venons de faire ne suppose pas que la fonction $f(x)$ conserve le même signe quand x varie de x_0 à X, ou que la limite supérieure X soit plus grande que la limite inférieure x_0; si l'on a $X < x_0$, les accroissements Δx sont négatifs et chaque produit $f(x)\Delta x$ est, dans tous les cas, positif ou négatif, selon que ses facteurs ont le même signe ou des signes contraires.

409. La notation dont nous faisons usage pour représenter les intégrales définies peut être employée avec avantage dans le cas des intégrales indéfinies. Reprenons en effet la formule (3) et considérons la limite supérieure X de l'intégrale comme une variable; on peut alors écrire x au lieu de X, et il viendra

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0);$$

cette expression représente l'une des valeurs de l'intégrale indéfinie de la différentielle $f(x)dx$, savoir, celle de ces valeurs qui s'annule pour $x = x_0$; on a donc

$$(6) \qquad \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

C étant une constante arbitraire.

La limite x_0 peut être choisie à volonté, en excluant cependant les valeurs particulières pour lesquelles $F(x_0)$

serait infinie; si on la regarde comme une constante arbitraire, $F(x_0)$ sera elle-même une constante arbitraire, et l'on pourra écrire simplement, à cause de la formule (5),

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

mais il vaut mieux, en général, se réserver le droit de fixer la limite à partir de laquelle commence l'intégrale et laisser subsister la constante arbitraire dans le second membre de la formule.

Des procédés d'intégration.

410. Quelle que soit la fonction explicite ou implicite $f(x)$ de la variable réelle x, pourvu qu'elle soit continue dans un certain intervalle, il existe, comme nous l'avons démontré, une fonction bien déterminée qui a pour différentielle $f(x)\,dx$ et qui se réduit à zéro pour une valeur donnée quelconque x_0 de x. Nous sommes convenus de représenter cette fonction par la notation

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

mais il est naturel de chercher à l'exprimer, quand cela est possible, par le moyen des éléments analytiques connus, c'est-à-dire par les fonctions *algébriques, logarithmiques, exponentielles* et *circulaires*. Cette recherche constitue ce que l'on nomme l'*intégration* de la différentielle $f(x)\,dx$; elle fera l'objet des développements que nous nous proposons de présenter ici et qui sont nécessairement bornés à un petit nombre de cas.

411. Cas d'une intégrale exprimable par une fonction simple. — Nous devons avant tout rappeler les

résultats auxquels nous a conduits la différentiation des fonctions simples, car ces résultats nous font connaître les intégrales qui s'expriment par une telle fonction. On a

$$d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\,dx, \quad d\sin x = \cos x\,dx, \quad d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d\,\frac{e^{mx}}{m} = e^{mx}\,dx, \quad d\cos x = -\sin x\,dx, \quad d\,\text{séc}\,x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x},$$

$$d\log x = \frac{dx}{x}, \quad d\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d\,\text{coséc}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x},$$

$$d\,\text{arc}\sin x = \frac{+dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,\text{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d\,\text{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d\,\text{arc}\,\text{séc}\,x = \frac{+dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$d\,\text{arc}\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d\,\text{arc}\,\text{coséc}\,x = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

et l'on en conclut immédiatement, en désignant par C une constante arbitraire,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + C, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \text{séc}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\,x + C, \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\text{coséc}\,x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C = -\text{arc}\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,\text{tang}\,x + C = -\text{arc}\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}\,\text{séc}\,x + C = -\text{arc}\,\text{coséc}\,x + C.$$

On peut aussi écrire, en désignant par x_0 une valeur quelconque de x,

$$\int_{x_0}^{x} x^n\,dx = \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1},$$

$$\int_{x_0}^{x} e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx} - e^{mx_0}}{m},$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0}.$$

La troisième formule de ce groupe est comprise dans la première, et elle se déduit de celle-ci en faisant tendre $n+1$ vers zéro; on a effectivement, par la règle du n° 124,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \log x - \log x_0 = \lim \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour } n+1 = 0.$$

Si l'on suppose $x_0 = 1$ dans la formule précédente, il viendra

$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{x} = \log x;$$

on trouverait de même, en prenant $x_0 = 0$,

$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x, \qquad \int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x.$$

La fonction $\log x$ et les fonctions circulaires inverses telles que $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, sont donc des intégrales de différentielles algébriques, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque (n° 44), et si l'Algèbre et la Trigonométrie n'en avaient préalablement constitué la théorie, elles se seraient présentées dès le début du Calcul intégral comme des éléments analytiques nou-

veaux indispensables. Cette remarque suffit pour faire pressentir dès à présent que l'intégration doit donner naissance à une infinité de fonctions nouvelles irréductibles aux types déjà connus, ce qui ouvre à l'analyse un champ de recherches illimité.

412. Cas d'une différentielle égale au produit d'une différentielle donnée par une constante. — Soit la différentielle $au\,dx$, dans laquelle a est une constante et u une fonction de x; il est évident que l'on a

$$\int au\,dx = a\int u\,dx,$$

car les deux membres de cette égalité ont la même différentielle et chacun de ces membres renferme d'ailleurs une constante arbitraire.

Si l'on veut prendre l'intégrale $au\,dx$ de manière qu'elle s'annule pour $x = x_0$, on écrira

$$\int_{x_0}^{x} au\,dx = a\int_{x_0}^{x} u\,dx,$$

égalité évidente, puisque les deux membres ont la même différentielle et qu'ils s'annulent tous deux pour $x = x_0$.

413. Cas où la différentielle donnée est la somme de plusieurs différentielles. — Soient $u, v, w, \ldots, s$ des fonctions données de x: si l'on pose

$$y = u + v + w + \ldots + s,$$

il est évident que l'intégrale indéfinie de la différentielle $y\,dx$ aura pour valeur

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \ldots + \int s\,dx,$$

car les deux membres de cette égalité ont la même diffé-

rentielle, et en conséquence ils ne peuvent différer que par une constante; chaque intégrale entraîne d'ailleurs avec elle une constante arbitraire.

Si l'on veut prendre l'intégrale de la différentielle $y\,dx$ de manière qu'elle s'annule pour $x = x_0$, on aura

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} u\,dx + \int_{x_0}^{x} v\,dx + \int_{x_0}^{x} w\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} s\,dx,$$

puisque les deux membres de cette formule s'évanouissent pour $x = x_0$.

Si u et v sont deux fonctions réelles de la variable réelle x et que l'on fasse

$$y = u + v\sqrt{-1},$$

on aura (n° 359)

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \sqrt{-1}\int v\,dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} u\,dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} v\,dx.$$

414. Intégration par parties. — Le procédé dit *de l'intégration par parties* est d'un usage fréquent en Analyse, où il offre de précieux secours; voici en quoi il consiste. Soient u et v deux fonctions quelconques d'une même variable x, on a

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx};$$

multipliant par dx et prenant ensuite l'intégrale indéfinie de chaque membre, on aura

$$uv = \int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx + \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx,$$

ou

$$(1)\qquad \int \left(u\,\frac{dv}{dx}\right) dx = uv - \int \left(v\,\frac{du}{dx}\right) dx;$$

nous n'ajoutons pas de constante, puisque chaque intégrale comporte une constante arbitraire.

La formule précédente exprime, comme on va voir, la règle de l'intégration par parties. Soit $y\,dx$ une différentielle donnée; parmi les manières en nombre indéfini de décomposer $y\,dx$ en deux facteurs, choisissons-en une telle, que l'un des facteurs soit la différentielle d'une fonction connue v, et désignons par u l'autre facteur; alors on aura

$$y\,dx = u\,\frac{dv}{dx}\,dx,$$

et, d'après la formule (1), l'intégrale de la différentielle $y\,dx$ pourra être décomposée en deux parties, savoir : une *partie intégrée* uv et une *partie non intégrée* $-\int\left(v\,\frac{du}{dx}\right)dx$. C'est donc à l'intégration de la différentielle $v\,\frac{du}{dx}\,dx$ que se trouve ramenée celle de la différentielle $y\,dx$ ou $u\,\frac{dv}{dx}\,dx$. Si la nouvelle différentielle est plus simple que la proposée, on aura fait un emploi avantageux de l'intégration par parties.

Si l'on veut prendre les intégrales de la formule (1) de manière qu'elles s'annulent pour $x = x_0$, il est nécessaire de tenir compte de la constante arbitraire qui accompagne l'intégrale de l'un des membres, celle du second membre par exemple. Cette constante est évidemment égale à la valeur changée de signe que prend la partie intégrée uv pour $x = x_0$; donc, si l'on désigne par u_0 et v_0

les valeurs de u et de v qui répondent à $x = x_0$, on aura

$$\int_{x_0}^{x} \left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = (uv - u_0 v_0) - \int_{x_0}^{x} \left(v \frac{du}{dx}\right) dx;$$

on écrit aussi, quelquefois,

$$\int_{x_0}^{x} \left(u \frac{dv}{dx}\right) dx = [uv]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \left(v \frac{du}{dx}\right) dx,$$

le symbole $[uv]_{x_0}^{x}$ exprimant la différence $uv - u_0 v_0$ ou l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{d(uv)}{dx} dx$.

415. Exemples. — Nous aurons l'occasion, dans ce qui va suivre, de faire des applications nombreuses du procédé que nous venons d'indiquer ; il convient cependant d'en présenter ici des exemples.

1° Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \log x \, dx$$

et prenons

$$u = \log x, \quad v = x, \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dx} dx = dx,$$

on aura

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x};$$

l'intégrale du second membre se réduit à $\int dx$, c'est-à-dire à $x +$ une constante ; on a donc

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C,$$

C étant une constante arbitraire. Dans cet exemple, l'intégration par parties permet de trouver la valeur de l'intégrale proposée.

2° Considérons l'intégrale

$$\int x^m e^{-x}\, dx;$$

décomposons la différentielle en deux facteurs

$$x^m, \quad e^{-x}\, dx,$$

dont le second est la différentielle de $-e^{-x}$; les fonctions que nous avons désignées par u et v sont ici x^m et $-e^{-x}$; on a donc

$$\int x^m e^{-x}\, dx = -x^m e^{-x} + m \int x^{m-1} e^{-x}\, dx.$$

L'intégrale proposée est ramenée à une autre intégrale de même forme et qui ne diffère de la première qu'en ce que l'exposant m de x est remplacé par $m-1$. Si le nombre m est positif, la nouvelle intégrale est plus simple que la première; le contraire a lieu quand m est négatif, et, dans ce dernier cas, c'est l'intégrale du second membre qu'il faudra regarder comme réduite à celle du premier; écrivant $-m+1$ au lieu de m, la formule précédente donnera

$$\int x^{-m} e^{-x}\, dx = \frac{x^{1-m} e^{-x}}{1-m} + \frac{1}{1-m} \int x^{1-m} e^{-x}\, dx.$$

Supposons que m soit un entier positif, et posons, pour abréger,

$$u_m = \int_0^x x^m e^{-x}\, dx, \quad \alpha_m = -x^m e^{-x},$$

on aura, par la formule trouvée plus haut, en remarquant que α_m s'annule pour $x = 0$,

$$u_m = \alpha_m + m u_{m-1},$$

et, en donnant à m les valeurs 1, 2, 3,..., m, il viendra

$$u_1 = \alpha_1 + u_0,$$
$$u_2 = \alpha_2 + 2u_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_m = \alpha_m + m u_{m-1};$$

ajoutant ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les facteurs

$$1, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2\ldots m},$$

il viendra

$$\frac{u_m}{1.2\ldots m} = u_0 + \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{1.2\ldots m};$$

or

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + \text{const.},$$

d'où

$$u_0 = \int_0^x e^{-x}\,dx = 1 - e^{-x};$$

on aura donc

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\int_0^x x^m e^{-x}\,dx$$
$$= 1 - e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m}\right]$$

416. Intégration par substitution. — Le procédé d'intégration qu'il nous reste à indiquer consiste dans le changement de la variable indépendante ; ce procédé et celui de l'intégration par parties constituent les ressources principales de la partie du Calcul intégral dont nous nous occupons.

Soit $f(x)\,dx$ une différentielle donnée ; si l'on prend une nouvelle variable indépendante t liée à x par une

équation telle que

$$(1) \qquad x = \varphi(t),$$

on aura

$$dx = \varphi'(t)\,dt,$$

et, par conséquent,

$$f(x)\,dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \psi(t)\,dt;$$

il en résultera

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx = \int \psi(t)\,dt.$$

Si l'on sait intégrer la différentielle $\psi(t)\,dt$ et que l'on ait

$$\int \psi(t)\,dt = \Psi(t) + \text{const.},$$

on aura aussi

$$\int f(x)\,dx = \Psi(t) + \text{const.},$$

et, en remettant au lieu de t sa valeur exprimée en x, on aura

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \text{const.},$$

$\mathrm{F}(x)$ étant une fonction connue.

L'emploi de la méthode de substitution peut être très-utile, même lorsqu'elle n'a pas pour effet l'intégration de la différentielle donnée; elle permet en effet, dans un grand nombre de cas, de substituer à l'intégrale $\int f(x)\,dx$ de cette différentielle une autre intégrale plus simple $\int \psi(t)\,dt$.

Supposons qu'on veuille prendre l'intégrale de la différentielle $f(x)\,dx$ de manière qu'elle s'annule pour

$x = x_0$; alors l'intégrale de la différentielle égale $\psi(t)dt$ devra être prise aussi de manière qu'elle s'annule pour la même valeur de x. Par conséquent, si t_0 désigne la valeur qu'il faut donner à t pour que x se réduise à x_0, on aura

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\,dt.$$

417. Exemples. — 1° Considérons d'abord l'intégrale $\int (ax+b)^m dx$. Posons

$$ax+b=t,\quad x=\frac{t-b}{a},\quad dx=\frac{dt}{a},$$

il viendra

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{(m+1)a} + \text{const.},$$

ou

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + \text{const.}$$

2° Soit en second lieu l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, p et q étant des quantités données, telles que l'on ait $p^2-4q<0$. Si l'on pose

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,t,\quad dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt,$$

il viendra

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int \frac{dt}{t^2+1};$$

or on a

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \text{arc tang}\, t + \text{const.};$$

donc

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \text{const.}$$

Intégration des différentielles rationnelles.

418. L'étude des différentielles algébriques va d'abord nous occuper, mais cette étude doit être bornée ici aux cas les plus simples ; nous considérerons en premier lieu les différentielles rationnelles.

Toute fonction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ de la variable x est décomposable (n° 392) en une partie entière qui peut être nulle, et en diverses fractions simples ayant pour numérateurs des constantes et pour dénominateurs les puissances des binômes linéaires par lesquelles le dénominateur $f(x)$ est divisible. Ainsi, en supposant

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \\ &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \end{aligned} \right.$$

A, A_1, ..., B, ..., L, ..., a_0, a_1, ... étant des coeffi-

cients constants. Or on a

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{const.};$$

on a aussi, quand μ est différent de 1,

$$\int \frac{dx}{(x-g)^{\mu}} = -\frac{1}{(\mu-1)}\,\frac{1}{(x-g)^{\mu-1}} + \text{const.}$$

et, dans le cas de $\mu = 1$,

$$\int \frac{dx}{x-g} = \log(x-g) + \text{const.};$$

si donc on intègre les deux membres de la formule (1), après les avoir multipliés par dx, il viendra

$$(2)\left\{\begin{aligned}\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = {} & \frac{a_0}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_1}{m}x^m + \ldots + \frac{a_{m-1}}{2}x^2 + a_m x + \text{const.}\\ & - \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \ldots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1}\log(x-a)\\ & - \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \ldots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1}\log(x-b)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & - \frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \ldots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1}\log(x-l);\end{aligned}\right.$$

de cette formule résulte la proposition suivante :

Théorème. — *L'intégrale d'une différentielle rationnelle est toujours exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.*

Conditions pour que l'intégrale d'une différentielle rationnelle soit algébrique.

419. Pour que l'intégrale de la différentielle rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}\,dx$ soit algébrique, il faut et il suffit que, dans

le développement de $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions simples, il n'y ait aucun terme dont le dénominateur soit du premier degré. Ces conditions pour qu'il en soit ainsi sont, en conservant les notations du numéro précédent,

$$A_{\alpha-1}=0,\quad B_{\beta-1}=0,\quad C_{\gamma-1}=0,\quad \ldots.$$

Cela exige d'abord que le polynôme $f(x)$ ne contienne aucun facteur linéaire simple. Nous avons vu, au n° 398, qu'en posant

$$\varphi(x)=(x-a)^{\alpha}\frac{F(x)}{f(x)},\quad \psi(x)=(x-b)^{\beta}\frac{F(x)}{f(x)},\quad \ldots$$

on a

$$A_{\alpha-1}=\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)},\quad B_{\beta-1}=\frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2\ldots(\beta-1)},\quad \ldots;$$

les conditions pour que $\int\frac{F(x)}{f(x)}dx$ soit algébrique sont donc

$$\varphi^{\alpha-1}(a)=0,\quad \psi^{\beta-1}(b)=0,\quad \ldots,$$

quelles que soient les quantités a, b, ..., c, réelles ou imaginaires.

Ces conditions sont en même nombre que les racines $a, b, \ldots, l$; mais, si le degré de $F(x)$ est inférieur de deux unités au moins à celui de $f(x)$, l'une d'elles sera comprise dans les autres. Désignons, en effet, par m le degré de $f(x)$, et supposons que $F(x)$ soit au plus du degré $m-2$; la partie entière $E(x)$ de $\frac{F(x)}{f(x)}$ sera nulle, et si l'on réduit au même dénominateur toutes les fractions simples, pour les ajouter et recomposer la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, on voit sans peine que le numérateur de la frac-

tion ainsi obtenue contiendra x^{m-1} avec le coefficient

$$A_{\alpha-1} + B_{\beta-1} + \ldots + L_{\lambda-1}.$$

Ce coefficient doit être nul, puisque $F(x)$ est du degré $m-2$ au plus; on a donc

$$\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2\ldots(\alpha-1)} + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2\ldots(\beta-1)} + \ldots + \frac{\varpi^{\lambda-1}(l)}{1.2\ldots(\lambda-1)} = 0;$$

et, par conséquent, l'une des conditions pour que $\int \frac{F(x)}{f(x)}dx$ soit algébrique rentrera dans les autres.

L'équation précédente comprend, comme cas particulier, une formule que nous avons établie au n° 394.

Autre forme de l'intégrale des différentielles rationnelles.

420. Ce que nous avons dit au n° 418 est applicable à une différentielle rationnelle quelconque $\frac{F(x)}{f(x)}dx$. Si, parmi les racines de l'équation $f(x) = 0$, il y en a qui soient imaginaires, l'intégrale renfermera des logarithmes imaginaires, mais on pourra les remplacer par des arcs de cercle réels en se servant des formules que nous avons établies au n° 371, et l'on obtiendra ainsi un résultat débarrassé d'imaginaires, pourvu cependant que les coefficients des polynômes $F(x)$ et $f(x)$ soient réels. Mais, en supposant ce dernier cas, la fonction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$ est susceptible, comme on l'a vu (n° 401), d'un mode de décomposition où ne figurent que des quantités réelles, et il est facile de procéder à l'intégration en partant de cette décomposition nouvelle.

Ici l'expression de $\frac{F(x)}{f(x)}$ pourra contenir des termes de

même forme qu'au n° 418 avec de nouveaux termes de la forme $\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}$, P et Q désignant des coefficients réels constants, et $x^2 + px + q$ étant le produit des facteurs linéaires qui répondent à deux racines imaginaires conjuguées de l'équation $f(x) = 0$. A l'égard des premiers termes, nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit plus haut, et nous avons à nous occuper seulement des intégrales de la forme

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}\, dx.$$

Par la substitution

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, t,$$

l'intégrale précédente devient égale à

$$\frac{P}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-1}} \int \frac{t\,dt}{(t^2 + 1)^n} + \frac{Q - \frac{1}{2}Pp}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n};$$

or, $t\,dt$ étant la moitié de la différentielle de $t^2 + 1$, on a, si n est > 1,

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2 + 1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}} + \text{const.}$$

et, si $n = 1$,

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) + \text{const.};$$

tout est donc ramené à déterminer l'intégrale

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

En introduisant au numérateur de la différentielle le facteur $(t^2+1) - t^2$, il vient

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n};$$

on a ensuite

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int t\,\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n}$$

et

$$\frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)(t^2+1)^{n-1}}\right];$$

l'intégration par parties donnera donc

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}},$$

au moyen de quoi l'on aura

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

On aura de même, en écrivant $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 2 au lieu de n,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} = \frac{1}{2n-4}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-2}},$$

. . . .

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Si l'on ajoute les $n-1$ équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par les facteurs

$$1, \quad \frac{2n-3}{2n-2}, \quad \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}, \quad \ldots,$$

il viendra

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \left[\frac{1}{2n-2}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)}\,\frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \ldots + \frac{(2n-3)\ldots 1}{(2n-2)\ldots 2}\,\frac{t}{t^2+1}\right]$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\,\text{arc tang}\,t + \text{const.},$$

à cause de

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \text{tang}\,t + \text{const.}$$

Si donc on ne veut introduire que des quantités réelles dans l'intégrale d'une différentielle rationnelle, on devra dire que cette intégrale est exprimable par des fonctions *algébriques, logarithmiques et circulaires.*

Des différentielles algébriques qui ne renferment pas d'autres irrationnelles que des puissances fractionnaires de la variable.

421. Nous allons examiner les cas principaux dans lesquels une différentielle algébrique irrationnelle $f(x)\,dx$ peut être ramenée à la forme rationnelle par un changement de variable.

La réduction dont il s'agit s'obtient immédiatement quand la fonction $f(x)$ est une fonction rationnelle de puissances entières et de puissances fractionnaires de x: dans ce cas, si l'on désigne par m un entier divisible par les dénominateurs des exposants de x dans $f(x)$, il suffira de poser

$$x = t^m, \quad dx = mt^{m-1}\,dt.$$

et l'on aura

$$f(x)\,dx = mf(t^m)\,t^{m-1}\,dt,$$

ce qui est bien une différentielle rationnelle.

Une transformation semblable opère la réduction demandée quand $f(x)$ est une fonction rationnelle de x et de puissances fractionnaires d'un binôme du premier degré $ax+b$. Si m désigne un entier divisible par les dénominateurs des exposants de ces puissances, on posera

$$ax+b = t^m, \quad x = \frac{t^m - b}{a}, \quad dx = \frac{m}{a}\,t^{m-1},$$

et, après la substitution, on aura

$$f(x)\,dx = \varphi(t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction rationnelle.

422. Exemple. — Considérons la différentielle

$$\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx;$$

en posant

$$x = t^6, \quad dx = 6\,t^5\,dt,$$

elle devient

$$6\,\frac{t^8+t^5}{t^2+1}\,dt = 6\,(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1) + \frac{6\,t\,dt}{t^2+1} + \frac{6\,dt}{t^2+1};$$

on a ensuite, en intégrant,

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}\,t^7 - \frac{6}{5}\,t^5 + \frac{3}{2}\,t^4 + 2\,t^3 - 3\,t^2 - 6\,t$$
$$+ 3\log(t^2+1) + 6\,\text{arc tang}\,t + \text{const.},$$

ou, en remettant au lieu de t sa valeur $x^{\frac{1}{6}}$,

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}\,x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}} + 2\,x^{\frac{1}{2}} - 3\,x^{\frac{1}{3}} - 6\,x^{\frac{1}{6}}$$
$$+ 3\log\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right) + 6\,\text{arc tang}\,x^{\frac{1}{6}} + \text{const.}$$

Des différentielles algébriques qui ne renferment pas d'autres irrationnelles que la racine carrée d'un polynôme du deuxième degré.

423. Le cas que nous avons ici en vue est celui d'une différentielle de la forme

$$F(x, X)\,dx,$$

X désignant la racine carrée d'un trinôme du deuxième degré en x, et $F(x, X)$ étant une fonction rationnelle de x et de X

Soit

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2};$$

si le coefficient c est nul, pour rendre rationnelle la différentielle proposée, il suffira de poser (n° 421)

$$a + bx = t^2, \quad dx = \frac{2}{b}\,t\,dt.$$

Supposons donc c différent de zéro; comme on peut faire sortir du radical un facteur numérique égal à la racine carrée de la valeur absolue de c, il est évident que nous pouvons poser

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2}.$$

Il convient d'examiner séparément le cas où x^2 est précédé du signe $+$ sous le radical et le cas où ce carré est précédé du signe —.

Soit d'abord

$$X = \sqrt{a + bx + x^2}.$$

Première transformation. — Pour rendre rationnelle la différentielle donnée, on peut poser $X = t \pm x$, t étant une nouvelle variable; nous ferons, par exemple,

$$X = t - x;$$

en élevant au carré, il vient

$$a + bx = t^2 - 2tx,$$

d'où

$$x = \frac{t^2 - a}{2t + b}, \quad X = \frac{t^2 + bt + a}{2t + b}, \quad dx = \frac{2(t^2 + bt + a)}{(2t + b)^2}\,dt.$$

et la substitution de ces valeurs donnera

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ désignant une fonction rationnelle de t.

Deuxième transformation. — On peut encore employer la transformation

$$X = \sqrt{a} + tx;$$

mais, si a et b sont des quantités réelles et qu'on veuille éviter l'emploi des imaginaires, cette transformation ne convient qu'au cas où a est positif. En élevant au carré la précédente équation, il vient

$$b + x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

d'où

$$x = \frac{2t\sqrt{a} - b}{1 - t^2}, \quad X = \frac{t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a}}{1 - t^2},$$

$$dx = \frac{2(t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a})}{(1 - t^2)^2}\,dt;$$

et la substitution de ces valeurs donnera encore

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ étant une fonction rationnelle.

Troisième transformation. — La transformation qu'il nous reste à indiquer est réelle lorsque l'équation $X^2 = 0$ a ses racines réelles, ce qui a toujours lieu quand a est négatif. Soient donc x_0 et x_1 les racines de l'équation

$X^2 = 0$, en sorte que

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x - x_1)};$$

on posera, en désignant par t une nouvelle variable.

$$X = (x - x_0)t,$$

ou, en élevant au carré,

$$x - x_1 = (x - x_0)t^2,$$

ce qui donnera

$$x = \frac{x_1 - x_0 t^2}{1 - t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0)t}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2(x_1 - x_0)t\,dt}{(1 - t^2)^2};$$

et, après la substitution de ces valeurs, on aura encore

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ étant une fonction rationnelle.

424. Exemple. — 1° Supposons que l'on demande d'intégrer la différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}};$$

la première transformation donnera

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{dt}{t + \frac{b}{2}} = \log\left(t + \frac{b}{2}\right) + \text{const.}$$

ou, en remettant au lieu de t sa valeur $x + X$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \log\left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + \text{const.}$$

2° Supposons qu'on demande d'intégrer la différentielle

$$X\,dx = \sqrt{a + bx + x^2}\,dx:$$

la première transformation donnera

$$\int X\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\left[\left(t+\frac{b}{2}\right)^2+\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\right]^2}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{b}{2}\right)dt + \frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\int\frac{dt}{t+\frac{b}{2}} + \frac{1}{4}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)^2\int\frac{dt}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{8}\left(t+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\log\left(t+\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)^2\frac{1}{\left(t+\frac{b}{2}\right)^2} + \text{const.}$$

d'ailleurs les quantités $t+\frac{b}{2}$ et $\dfrac{a-\frac{b^2}{4}}{t+\frac{b}{2}}$ ont respectivement pour valeurs $x+\frac{b}{2}+X$ et $-x-\frac{b}{2}+X$; on a donc

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2}\right)\sqrt{a+bx+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\log\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right) + \text{const.}$$

Il faut remarquer qu'on peut ramener l'intégrale proposée à celle du premier exemple, en faisant usage de l'intégration par parties. On a effectivement, en appliquant ce procédé,

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx = x\sqrt{a+bx+x^2} - \int\frac{x^2+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx;$$

d'ailleurs

$$\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx = \int\frac{a+bx+x^2}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx,$$

et, en ajoutant cette formule à la précédente, il vient

$$2\int\sqrt{a+bx+x^2}\,dx = x\sqrt{a+bx+x^2} + \int\frac{a+\frac{b}{2}x}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx;$$

la partie sous le signe $\int$ du second membre de cette nouvelle formule est égale à la somme

$$\left(a-\frac{b^2}{4}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + \frac{b}{2}\int\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a+bx+x^2}}\,dx$$

la première partie est connue par l'exemple I, et la seconde partie a évidemment pour valeur $\frac{b}{2}\sqrt{a+bx+x^2}$; on retrouve ainsi le résultat déjà obtenu.

3° Soit encore la différentielle

$$\frac{(\alpha+6x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

qui se rencontre fréquemment et dont l'intégrale se déduit immédiatement des calculs que nous venons d'exécuter. On a

$$\frac{(\alpha+6x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \left(\alpha-\frac{b6}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} + 6\,\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

et, en intégrant,

$$\int\frac{(\alpha+6x)\,dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \left(\alpha-\frac{b6}{2}\right)\log\left(x+\frac{b}{2}+\sqrt{a+bx+x^2}\right)$$
$$+\,6\sqrt{a+bx+x^2} + \text{const.}$$

425. Considérons maintenant le cas où l'on a

$$X = \sqrt{a+bx-x^2}.$$

Pour ramener la différentielle $F(x, X)\,dx$ à la forme

rationnelle, on peut employer la deuxième ou la troisième transformation du n° 423, lorsque a est positif. Dans le cas de $a < 0$, on devra se borner à la troisième transformation, si l'on ne veut introduire que des quantités réelles.

1° Supposons $a > 0$, on fera

$$X = \sqrt{a} + tx,$$

et, en élevant au carré,

$$b - x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

d'où

$$x = \frac{b - 2t\sqrt{a}}{1 + t^2}, \quad X = \frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{1 + t^2},$$

$$dx = -2\frac{\sqrt{a} + bt - t^2\sqrt{a}}{(1 + t^2)^2}\,dt;$$

la substitution de ces valeurs donnera

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ étant une fonction rationnelle.

2° Quelle que soit la constante a, l'équation $X^2 = 0$ a toujours ses racines réelles; car autrement l'expression X serait imaginaire. Nous n'excluons pas ce cas de notre analyse; mais, comme la fonction X est alors égale à $\sqrt{-1}\sqrt{-a - bx + x^2}$, on rentre dans le cas du n° 423. Désignant donc par x_0, x_1 les racines de l'équation $X^2 = 0$ et supposant $x_1 > x_0$, on aura

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}.$$

Pour effectuer la transformation que nous avons en vue, il faut poser

$$X = (x - x_0)t \quad \text{ou} \quad x_1 - x = (x - x_0)t^2,$$

d'où

$$x = \frac{x_1 + x_0 t^2}{1 + t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0)t}{1 + t^2}, \quad dx = -\frac{2(x_1 - x_0)t\,dt}{(1 + t^2)^2},$$

ce qui donnera encore

$$F(x, X)\,dx = \Phi(t)\,dt,$$

$\Phi(t)$ étant une fonction rationnelle.

426. Les diverses transformations que nous avons employées permettent de résoudre tous les cas qui peuvent se présenter; mais il n'est pas toujours nécessaire d'en faire usage, et il peut arriver que d'autres transformations conduisent plus aisément au résultat demandé.

Considérons, par exemple, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}};$$

on peut l'écrire comme il suit :

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}},$$

et l'on aperçoit sans peine qu'elle se réduira à la forme élémentaire $\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$, au moyen de la transformation

$$x - \frac{b}{2} = t\sqrt{a + \frac{b^2}{4}};$$

car

$$dx = dt\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$$

et

$$\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}\,\sqrt{1 - t^2};$$

on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{arc}\sin t + \text{const}.$$

ou

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} + \text{const.}$$

Ce résultat permet d'obtenir immédiatement la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\alpha - \beta x}{\sqrt{a + bx - x^2}}\, dx,$$

car cette intégrale peut être décomposée en deux parties, savoir :

$$\left(\alpha + \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} - \beta \int \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right) dx}{\sqrt{a + bx - x^2}};$$

la première partie est précisément l'intégrale que nous venons de déterminer à un facteur constant près, et la seconde partie a pour valeur $-\beta\sqrt{a + bx - x^2}$.

427. On peut encore ramener à la forme rationnelle une différentielle de la forme

$$F\left(x, \sqrt{a + bx}, \sqrt{a' + b'x}\right) dx,$$

F désignant une fonction rationnelle des trois quantités x, $\sqrt{a + bx}$, $\sqrt{a' + b'x}$. Ce cas rentre effectivement dans celui que nous venons d'examiner; car, si l'on fait

$$a' + b'x = t^2, \quad x = \frac{t^2 - a'}{b'}, \quad dx = \frac{2}{b'}\, t\, dt,$$

la différentielle proposée se réduira à la forme

$$\Phi(t, T)\, dt,$$

T désignant la racine carrée d'un polynôme du deuxième degré, et Φ étant une fonction rationnelle.

Étude des différentielles algébriques qui ne renferment pas d'autres irrationnelles que la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré.

428. Le cas le plus simple des différentielles algébriques, après ceux que nous venons d'examiner, est celui d'une différentielle de la forme

$$dV = F(x, X)\,dx, \tag{1}$$

X désignant la racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré, et $F(x, X)$ étant une fonction rationnelle de x et de X. Les intégrales des différentielles algébriques que nous avons considérées dans les numéros qui précèdent sont exprimables, comme on l'a vu, par des fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires; il n'en est plus ainsi, en général, à l'égard de la différentielle dV dont nous allons nous occuper. De l'étude que nous allons faire résultera la nécessité d'introduire dans l'analyse trois éléments nouveaux auxquels Legendre a donné le nom de *fonctions elliptiques*, et alors l'intégrale V sera exprimable par les fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires et elliptiques.

Soit

$$X = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}; \tag{2}$$

on doit supposer que le polynôme qui figure sous le radical de cette formule n'a pas de facteurs linéaires multiples, car autrement la différentielle dV appartiendrait à la classe de celles dont nous nous sommes occupé aux nos 423 et 425, et l'intégrale V serait exprimable par les seules fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires; ainsi, en particulier, les coefficients δ et ε ne peuvent être nuls tous deux, mais on peut avoir $\varepsilon = 0$.

Il convient de chercher d'abord à simplifier l'expression de la différentielle dV ; nous allons démontrer que, si les constantes qu'elle renferme sont réelles, on peut toujours, au moyen d'une substitution linéaire et réelle

$$(3) \qquad x = \frac{p + qt}{1 + t},$$

lui donner la forme

$$dV = \Phi(t, T)\, dt,$$

T désignant un radical de la forme

$$T = \sqrt{\pm(t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)},$$

dans lequel λ et μ sont des constantes réelles, et Φ étant une fonction rationnelle de t et de T.

429. Supposons d'abord que ε ne soit pas nul ; le polynôme qui figure sous le radical de la formule (2) peut toujours être décomposé en deux facteurs réels du deuxième degré, et, en conséquence, on peut écrire

$$(4) \qquad X = \sqrt{\varepsilon(f - 2gx + x^2)(f' - 2g'x + x^2)}.$$

Cela étant, on a, par la substitution (3),

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1+t)^2},$$

$$f' - 2g'x + x^2 = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1+t)^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$(5) \qquad \begin{cases} F = f - 2gp + p^2, & F' = f' - 2g'p + p^2, \\ G = -f + g(p+q) - pq, & G' = -f' + g'(p+q) - pq, \\ H = f - 2gq + q^2, & H' = f' - 2g'q + q^2, \end{cases}$$

et si l'on pose en outre

$$(6) \qquad T = \sqrt{\varepsilon\left(\frac{F}{H} - \frac{2G}{H}t + t^2\right)\left(\frac{F'}{H'} - \frac{2G'}{H'}t + t^2\right)},$$

on aura

$$(7)\qquad X = \frac{\sqrt{\pm \varepsilon HH'}}{(1+t)^2} T;$$

d'ailleurs la formule (3) donne

$$(8)\qquad dx = (q-p)\frac{dt}{(1+t)^2};$$

la différentielle dV deviendra donc, par notre substitution,

$$(9)\qquad dV = \Phi(t, T)\,dt,$$

Φ étant une fonction rationnelle, et ainsi elle conserve sa forme primitive.

Mais nous avons introduit deux indéterminées p et q, dont nous pouvons disposer pour faire disparaître les puissances impaires de t sous le radical de la formule (6); il suffit effectivement de poser $G = 0$, $G' = 0$, c'est-à-dire, à cause des formules (5),

$$f - g(p+q) + pq = 0,$$
$$f' - g'(p+q) + pq = 0.$$

On tire de là

$$(10)\qquad \begin{cases} p + q = \dfrac{f - f'}{g - g'}, \\ pq = \dfrac{fg' - gf'}{g - g'}, \end{cases}$$

puis

$$(11)\qquad p - q = \frac{\sqrt{(f + f' - 2gg')^2 - 4(f - g^2)(f' - g'^2)}}{g - g'}.$$

Écartant le cas de $g = g'$, sur lequel nous reviendrons tout à l'heure, on voit que la formule (11) détermine, avec la première des formules (10), les coefficients p et q de la substitution. Il faut prouver qu'on peut toujours faire en sorte que ces coefficients soient réels.

Désignons par a, b, c, d les quatre racines de l'équation $X^2 = 0$, et posons $f = ab$, $g = \frac{a+b}{2}$, $f' = cd$, $g' = \frac{c+d}{2}$. Remplaçons f, g, f', g' par leurs valeurs dans l'expression de $p - q$, on reconnaît que la quantité placée sous le radical s'annule pour $a = c$ ou $a = d$, et de même pour $b = c$ ou $b = d$; il en résulte que l'on a

$$p - q = 2\frac{\sqrt{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}}{a+b-c-d}.$$

Si les quatre racines sont réelles, on supposera

$$a > b > c > d.$$

Si deux racines sont réelles et deux imaginaires, on prendra pour a et pour b les deux racines réelles; les deux facteurs $a - c$, $a - d$, étant conjugués, ont un produit réel; il en est de même des facteurs $b - c$, $b - d$.

Si les quatre racines sont imaginaires, on supposera que a et b sont deux racines conjuguées. Les deux facteurs $a - b$, $b - d$ seront conjugués et de même les facteurs $a - d$, $b - c$.

Dans le cas de $g' = g$, on résout immédiatement le problème proposé en posant

$$x = g + t.$$

Remarquons, enfin, que les formules (7) et (8) donnent par la division

$$\frac{dx}{X} = \nu\frac{dt}{T},$$

ν désignant une constante déterminée.

430. Il nous reste à examiner le cas de $\varepsilon = 0$. Alors le polynôme qui figure sous le radical de la formule (1) est

décomposable en deux facteurs réels, l'un du premier degré, l'autre du deuxième degré. On a

$$X = \sqrt{-\delta(a-x)(f-2gx+x^2)},$$

et, par la substitution (3), il vient

$$a - x = \frac{(q-a)\left(\frac{a-p}{q-a} - t\right)(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1+t)^2},$$

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1+t)^2};$$

F, G, H ayant les valeurs données par les formules (5). Les formules (6) et (7) subsistent donc dans ce cas, pourvu que l'on écrive $-\delta$ au lieu de ε, et la première puissance de t disparaîtra de chaque facteur placé sous le radical, si l'on a $G = 0$, $G' = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{a-p}{q-a} = 1, \quad -f + g(p+q) - pq = 0;$$

on tire de là

$$\frac{p+q}{2} = a, \quad pq = 2ga - f$$

et

$$\frac{p-q}{2} = \sqrt{a^2 - 2ga + f} = \sqrt{(a-b)(a-c)},$$

b et c désignant les deux racines du trinôme $x^2 - 2fx + g$. Si les racines b et c sont réelles, on prendra pour a la plus grande ou la plus petite des trois racines du polynôme X^2. Si b et c sont imaginaires, le produit des facteurs conjugués $a - b$, $a - c$ est positif.

431. La fonction rationnelle $\Phi(t, T)$ peut être mise sous la forme

$$\frac{M + Nt}{M' + N't},$$

M, N, M′, N′ étant des fonctions entières de t^2 et de T, et, en multipliant les deux termes de cette expression par $M' - N't$, on lui donnera la forme

$$P + Qt,$$

P et Q étant des *fonctions rationnelles* de t^2 et de T. Ainsi la différentielle proposée dV sera

$$dV = P\,dt + Q\,t\,dt.$$

Mais si l'on fait $u = t^2$, $du = 2t\,dt$, le terme $Q\,t\,dt$ se réduira à $\frac{1}{2}Q\,du$, Q étant une fonction rationnelle de u et de la racine carrée d'un trinôme du deuxième degré; par conséquent l'intégrale de la différentielle $Q\,t\,dt$ est exprimable, d'après ce qui a été établi précédemment, par les fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires.

Quant à la partie $P\,dt$, elle est évidemment de la forme

$$\frac{M + NT}{M' + N'T}\,dt \quad \text{ou} \quad \frac{N + \dfrac{M}{T}}{N' + \dfrac{M'}{T}}\,dt,$$

M, N, M′, N′ étant des fonctions entières de t^2, et, si l'on multiplie les deux termes par $N' - \frac{M'}{T}$, on aura

$$P\,dt = \psi(t^2)\,dt + \varphi(t^2)\frac{dt}{T},$$

$\psi(t^2)$ et $\varphi(t^2)$ étant des fonctions rationnelles de t^2. La différentielle $\psi(t^2)\,dt$ est rationnelle, et en conséquence son intégrale est algébrique, logarithmique et circulaire; si donc on fait

$$dU = \varphi(t^2)\frac{dt}{T},$$

l'intégrale V sera exprimable par les fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires, jointes aux éléments nouveaux que peut contenir l'intégrale U.

432. Transformation du radical T. — La question que nous nous sommes proposée est ramenée, d'après ce qui précède, à l'étude des différentielles de la forme

$$dU = \varphi(t^2)\frac{dt}{T};$$

$\varphi(t^2)$ est une fonction rationnelle de t^2, et T représente un radical qui a l'une des cinq formes suivantes :

1° $$T = \sqrt{+(t^2 - p^2)(t^2 - q^2)},$$

2° $$T = \sqrt{-(t^2 - p^2)(t^2 - q^2)},$$

3° $$T = \sqrt{+(t^2 + p^2)(t^2 - q^2)},$$

4° $$T = \sqrt{-(t^2 + p^2)(t^2 - q^2)},$$

5° $$T = \sqrt{+(t^2 + p^2)(t^2 + q^2)},$$

où p et q sont des quantités réelles données; nous excluons l'hypothèse de

$$T = \sqrt{-(t^2 + p^2)(t^2 + q^2)},$$

parce qu'elle répond à une valeur imaginaire de dU; d'ailleurs ce cas se ramène au cinquième de ceux que nous avons énumérés, en écrivant $dU\sqrt{-1}$ au lieu de dU.

Dans les cinq cas que nous avons à examiner, le radical peut être ramené à une même forme par un changement de variable; la forme que nous adoptons n'est pas la seule que l'on puisse choisir, mais elle est la plus commode et la plus fréquemment employée.

1° Considérons d'abord le premier cas; supposons, ce

qui est permis, $p^2 < q^2$, et posons

$$\frac{p^2}{q^2} = k^2;$$

pour que le radical T reste réel, il faut que l'on ait

$$t^2 < p^2 \quad \text{ou} \quad t^2 > q^2.$$

Si t^2 est $< p^2$, nous poserons

$$t = px, \quad dt = p\,dx,$$

et l'on aura

$$\mathrm{T} = kq^2\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

d'où

$$\frac{dt}{\mathrm{T}} = \frac{1}{q}\,\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

Si t^2 est $> q^2$, on posera

$$t = \frac{q}{x}, \quad dt = -\frac{q\,dx}{x^2};$$

il en résultera

$$\mathrm{T} = \frac{q^2}{x^2}\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

et l'on aura pour $\frac{dt}{\mathrm{T}}$ la même valeur que dans l'hypothèse précédente, à cause de l'ambiguïté du signe des radicaux.

2° Nous pouvons encore, dans le deuxième cas, supposer $p^2 < q^2$, et nous poserons

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2.$$

Il faut, pour la réalité du radical T, que t^2 reste compris entre p^2 et q^2; nous emploierons la substitution

$$t^2 = q^2(1 - k^2x^2),$$

qui donnera

$$dt = k^2 q \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}, \quad T = k^2 q^2 x \sqrt{1 - x^2}$$

et, par suite,

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

3° Dans le troisième cas, la réalité du radical T exige que t^2 soit $> q$; nous ferons

$$\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2,$$

et nous emploierons la substitution

$$t^2 = \frac{q^2}{1 - x^2},$$

qui donnera

$$dt = \frac{q x\,dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \frac{pq}{k} \frac{x\sqrt{1 - k^2 x^2}}{1 - x^2};$$

d'où résulte

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{p} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

4° Dans le quatrième cas, on doit avoir $t^2 < q^2$ pour la réalité du radical T; nous poserons

$$\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2,$$

et nous emploierons la substitution

$$t^2 = q^2(1 - x^2),$$

qui donnera

$$dt = q \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad T = \frac{q^2}{k} x \sqrt{1 - k^2 x^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

5° Enfin, dans le cinquième cas, le radical T est toujours réel ; nous supposerons $p^2 < q^2$ et nous ferons

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2.$$

Ensuite nous emploierons la substitution

$$t^2 = p^2 \frac{x^2}{1 - x^2},$$

qui donne

$$dt = \frac{p\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = pq \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{1-x^2},$$

et nous aurons

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

On voit, en résumé, que si l'on pose

$$X = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

k^2 désignant une quantité positive inférieure à l'unité, le rapport $\frac{dt}{T}$ est égal, dans chacun des cinq cas que nous avons examinés, au rapport $\frac{dx}{X}$ multiplié par une constante. D'ailleurs, dans les diverses transformations que nous avons employées, le carré t^2 est exprimé par une fonction rationnelle du carré x^2 de la nouvelle variable x:

donc la différentielle dU se trouve ramenée à la forme

$$dU = f(x^2)\frac{dx}{X},$$

$f(x^2)$ étant une fonction rationnelle de x^2.

433. La fonction $f(x^2)$ peut être décomposée en une partie entière et en diverses fractions simples ayant pour numérateurs des constantes et pour dénominateurs des puissances entières d'un binôme formé par l'addition de x^2 et d'une constante. Lorsque cette constante est nulle, la fraction simple correspondante se réduit au produit d'une constante par une puissance entière et négative de x^2; donc chaque terme de $f(x^2)$ sera de l'une ou de l'autre des deux formes

$$x^{2\mu}, \qquad \frac{1}{(1+nx^2)^\nu},$$

en faisant abstraction du coefficient et en désignant par n une constante, par μ et ν deux entiers dont le premier peut être nul ou négatif.

Si donc on pose

$$(1) \qquad Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu}\,dx}{X}, \quad Z_\nu = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X},$$

l'intégrale U sera une somme de termes qui s'obtiendront en multipliant par des coefficients constants des fonctions du genre Y_μ ou Z_ν; il nous reste à étudier ces fonctions.

Considérons d'abord les intégrales Y_μ. On a

$$X^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

d'où

$$X\frac{dX}{dx} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3;$$

en multipliant cette formule par $\dfrac{x^{2\mu-3}\,dx}{X}$ et en prenant

ensuite l'intégrale de chaque membre, on obtient

$$2k^2 Y_\mu - (1+k^2) Y_{\mu-1} = \int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx}\, dx.$$

Or l'intégration par parties donne

$$\int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx}\, dx = x^{2\mu-3} X - (2\mu-3) \int X x^{2\mu-4}\, dx;$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned} \int X x^{2\mu-4}\, dx &= \int \frac{X^2 x^{2\mu-4}}{X}\, dx \\ &= \int \frac{x^{2\mu-4} - (1+k^2) x^{2\mu-2} + k^2 x^{2\mu}}{X}\, dx \\ &= Y_{\mu-2} - (1+k^2) Y_{\mu-1} + k^2 Y_\mu; \end{aligned}$$

donc on a

$$(2)\quad (2\mu-1) k^2 Y_\mu - (2\mu-2)(1+k^2) Y_{\mu-1} + (2\mu-3) Y_{\mu-2} = x^{2\mu-3} X.$$

Nous n'ajoutons pas de constante au second membre, parce que chacune des intégrales Y_μ renferme une constante arbitraire. Il faut remarquer que la formule (2) aurait pu être trouvée plus rapidement en différentiant le produit $x^{2\mu-3}X$ et en intégrant ensuite la différentielle obtenue, mais la marche que nous avons suivie est plus analytique.

Si l'on fait, dans la formule (2), $\mu = 2, 3, 4, \ldots$, on déterminera successivement

$$Y_2, \; Y_3, \; Y_4, \; \ldots$$

en fonction de Y_0, Y_1 et de quantités algébriques. Si l'on fait $\mu = 1$, la formule (2) fera connaître Y_{-1} en fonction de Y_1 et de quantités algébriques; enfin, si l'on y fait $\mu = 0, -1, -2, -3, \ldots$, la même formule fera con-

naître successivement les valeurs de

$$Y_{-2},\ Y_{-3},\ Y_{-4},\ \ldots,$$

en fonction de Y_0, Y_1 et de quantités algébriques. Ainsi la considération des intégrales Y_μ conduit seulement à deux fonctions élémentaires nouvelles Y_0 et Y_1.

434. Occupons-nous maintenant des fonctions Z_ν; l'indice ν est pour nous un entier positif, mais on doit remarquer que, si l'on attribue à ce nombre des valeurs négatives, les fonctions Z_ν correspondantes seront des sommes de fonctions Y_μ; par conséquent, elles pourront s'exprimer par les fonctions Y_0, Y_1 et les quantités algébriques; on a effectivement

$$Z_{-\nu} = \int \frac{(1+nx^2)^\nu\,dx}{X} = Y_0 + \frac{\nu}{1}\,n\,Y_1 + \ldots + \text{const.}$$

Cela posé, on peut employer l'intégration par parties pour obtenir une formule de réduction analogue à celle qui concerne les fonctions Y_μ, mais on arrive plus promptement au but proposé en opérant comme il suit. Différentions la fonction

$$\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}},$$

nous aurons

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right] = \left[\frac{(2\nu-2)X^2}{(1+nx^2)^\nu} - \frac{(2\nu-3)X^2 - \dfrac{x}{2}\dfrac{d(X^2)}{dx}}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right]\frac{dx}{X};$$

ensuite, si l'on ordonne les polynômes X^2 et $\dfrac{x}{2}\dfrac{d(X^2)}{dx}$ par rapport aux puissances de $(1+nx^2)$, on trouvera

$$X^2 = \frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2} - \frac{n+(n+2)k^2}{n^2}(1+nx^2) + \frac{k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

$$\frac{x}{2}\frac{d(X^2)}{dx} = \frac{n+(n+2)k^2}{n^2} - \frac{n+(n+4)k^2}{n^2}(1+nx^2) + \frac{2k^2}{n^2}(1+nx^2)^2,$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} A &= (2\nu-2)\frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2},\\ B &= (2\nu-3)\frac{n(n+2)+(2n+3)k^2}{n^2},\\ C &= (2\nu-4)\frac{n+(n+3)k^2}{n^2},\\ D &= (2\nu-5)\frac{k^2}{n^2},\end{aligned}\right.$$

on aura, par les formules précédentes,

$$d\left[\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}\right] = A\,dZ_\nu - B\,dZ_{\nu-1} + C\,dZ_{\nu-2} - D\,dZ_{\nu-3},$$

d'où, en intégrant,

$$(4)\qquad AZ_\nu - BZ_{\nu-1} + CZ_{\nu-2} - DZ_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}.$$

Le coefficient A est nul, dans les deux cas de $n = -1$ et de $n = -k^2$; alors on a

$$B = -(2\nu-3)(1-k^2) \quad \text{ou} \quad B = +(2\nu-3)\frac{1-k^2}{k^2};$$

B n'est donc pas nul, puisque k^2 est inférieur à l'unité. La formule (4) se réduit à

$$(5)\qquad -BZ_{\nu-1} + CZ_{\nu-2} - DZ_{\nu-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}},$$

et, si l'on donne à ν les valeurs 2, 3, 4, ..., la formule (5) déterminera successivement

$$Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \ldots,$$

en fonction de quantités algébriques et des intégrales Z_0, Z_{-1} ou, si l'on veut, des intégrales Y_0, Y_1, puisque

$$Z_0 = Y_0,\quad Z_{-1} = Y_0 + nY_1.$$

Ainsi, dans le cas où $1 + nx^2$ est égal à l'un des facteurs

de X^2, la considération des fonctions Z_ν n'introduit aucun élément analytique nouveau.

Supposons maintenant que n ne soit égal ni à -1 ni à $-k^2$; alors A ne peut être nul que pour $\nu = 1$. Si l'on donne à ν les valeurs 2, 3, 4, ..., la formule (4) déterminera successivement

$$Z_2,\ Z_3,\ Z_4,\ \ldots$$

en fonction de Z_1, Z_0, Z_{-1} et de quantités algébriques. Or les intégrales Z_0, Z_{-1} s'expriment, comme on vient de le dire, au moyen de Y_0 et Y_1; donc la considération des fonctions Z_ν n'introduit qu'un seul élément nouveau Z_1.

De la discussion que nous venons de faire il résulte que l'intégrale de la différentielle proposée s'exprime au moyen des fonctions élémentaires connues et d'intégrales appartenant à l'un des trois genres

$$Y_0,\ Y_1,\ Z_1.$$

Les intégrales Y_0, Y_1, Z_1 constituent effectivement trois éléments analytiques nouveaux irréductibles entre eux, dans le cas général.

Des fonctions elliptiques.

435. Supposons que l'on prenne les intégrales représentées, au numéro précédent, par Y_0, Y_1, Z_1, de manière qu'elles s'annulent en même temps que x, et désignons-les alors par u, v, w; on aura

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Les transcendantes u, v, ϖ sont dites *fonctions elliptiques* ou *intégrales elliptiques* de la *première*, de la *deuxième* et de la *troisième espèce*.

Les fonctions de la première et de la deuxième espèce renferment une constante k inférieure à l'unité et qui a reçu le nom de *module*; la fonction de troisième espèce contient aussi le module k avec une deuxième constante n, qui est dite le *paramètre*. Nous avons vu que, si le paramètre n est égal à -1 ou à $-k^2$, la fonction de troisième espèce est exprimable par les fonctions de première et de deuxième espèce et par les quantités algébriques. On a effectivement, dans le cas de $n = -1$, par la formule (4) du n° 434,

$$(1 - k^2)\varpi + k^2 u - v = \frac{x\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}{1 - x^2},$$

et, dans le cas de $n = -k^2$,

$$(1 - k^2)\varpi - (u - k^2 v) = \frac{-k^2 x\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}{1 - k^2x^2},$$

comme il est aisé de s'en assurer par la différentiation.

436. Les fonctions elliptiques se réduisent aux fonctions circulaires ou logarithmiques dans les cas limites où le module devient égal à zéro ou à l'unité.

Dans le cas de $k = 0$, on a

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\varpi = \int_0^x \frac{dx}{(1 + nx^2)\sqrt{1 - x^2}};$$

la première formule équivaut à

$$u = \arc\sin x;$$

quant aux fonctions v et w, leurs différentielles peuvent être ramenées à la forme rationnelle par la méthode du n° 423; mais on peut aussi obtenir leurs valeurs de la manière suivante. L'intégration par parties donne

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

et, en prenant les intégrales de manière qu'elles s'annulent avec x, on a

$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$$

l'intégrale du second membre de cette formule est égale à $u - v$; on a donc

$$v = -\frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin x.$$

La différentielle dw se réduit à la forme rationnelle au moyen de la substitution

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

on a

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, par suite,

$$dw = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{d \operatorname{arc\,tang} t\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}};$$

donc

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le paramètre n étant supposé réel, on peut débarrasser la formule précédente des imaginaires qu'elle contient dans le cas de $1+n$ négatif, en introduisant des logarithmes au lieu des arcs de cercle (n° 372). D'ailleurs, on

peut écrire

$$d\varpi = \frac{dt}{1+(1+n)t^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\left(\frac{dt}{1+t\sqrt{-1-n}} + \frac{dt}{1-t\sqrt{-1-n}}\right),$$

d'où

$$\varpi = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\log\frac{1+t\sqrt{-1-n}}{1-t\sqrt{-1-n}} = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}}\log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1-n}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-1-n}}\right).$$

Les expressions précédentes de ϖ sont illusoires quand $n = -1$. Dans ce cas, les deux termes de la fraction

$$\varpi = \frac{\text{arc tang}\, t\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}}$$

s'évanouissent, et l'on a

$$\varpi = t \quad \text{ou} \quad \varpi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

437. Dans le cas de $k^2 = 1$, on a

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2}, \quad v = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{1-x^2}, \quad \varpi = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}.$$

Les différentielles des fonctions u, v, ϖ sont ici rationnelles ; en appliquant à la première la règle du n° 418, on trouve

$$u = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

on a d'ailleurs $du - dv = dx$, d'où

$$v = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{(1+nx^2)(1-x^2)} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{n}{1+nx^2} + \frac{1}{1-x^2}\right);$$

et, par conséquent,

$$\varpi = \frac{1}{1+n}\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2} + \frac{u}{1+n}.$$

Si n est positif, on a, en posant $x\sqrt{n}=t$,

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2}=\sqrt{n}\int_0^t \frac{dt}{1+t^2}=\sqrt{n}\operatorname{arc\,tang} t,$$

d'où

$$\varpi=\frac{1}{1-n}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{n}}{1+n}\operatorname{arc\,tang}(x\sqrt{n}).$$

Si, au contraire, n est négatif, on posera $x\sqrt{-n}=t$, et l'on aura

$$\int_0^x \frac{n\,dx}{1+nx^2}=-\sqrt{-n}\int_0^t \frac{dt}{1-t^2}=-\sqrt{-n}\log\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

d'où

$$\varpi=\frac{1}{1-n}\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{\sqrt{-n}}{1+n}\log\sqrt{\frac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}}}.$$

Pour avoir la valeur de ϖ dans le cas de $n=-1$, il suffit de prendre la dérivée de l'expression

$$-\sqrt{-n}\log\sqrt{\frac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}}}$$

par rapport à n, et d'y faire ensuite $n=-1$ (n° 124.) On trouve ainsi

$$\varpi=\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{x}{1-x^2}.$$

438. Les trois fonctions elliptiques u, v, ϖ prennent une forme très-simple quand on introduit l'angle qui a pour sinus la variable indépendante x; si l'on fait

$$x=\sin\varphi,\quad \sqrt{1-x^2}=\cos\varphi,$$

et que l'on pose, en outre,

$$\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

on aura

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad v = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \varpi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Considérons particulièrement l'intégrale de première espèce. L'angle φ est dit l'*amplitude* de u, et l'on écrit

$$\varphi = \operatorname{am} u;$$

on a par suite

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\operatorname{am} u.$$

La variable u a été regardée jusqu'à présent comme une fonction de x ; mais, si l'on prend maintenant u pour variable indépendante, x, $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-k^2x^2}$ ou, ce qui revient au même, $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ deviendront des fonctions de u. Ces fonctions remarquables, sur lesquelles nous reviendrons plus loin, doivent être regardées comme les *fonctions elliptiques directes* ou principales ; elles sont à l'égard de l'intégrale, dont elles dérivent, ce que sont les fonctions circulaires $\sin u$, $\cos u$, relativement aux fonctions inverses $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$.

Quand on prend u pour variable indépendante, les intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce ont pour expressions, à cause de $\dfrac{d\varphi}{\Delta\varphi} = du$,

$$v = \int_0^u \sin^2\operatorname{am} u\, du, \quad \varpi = \int_0^u \frac{du}{1+n\sin^2\operatorname{am} u}.$$

Des différentielles binômes.

439. Parmi les différentielles algébriques, on doit remarquer celles auxquelles on a donné le nom de *différentielles binômes* et qui se présentent très-fréquemment.

La forme générale de ces différentielles est

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

a et b désignant des constantes données et m, n, p des exposants rationnels.

On peut supposer n positif; car la différentielle proposée peut être mise sous la forme

$$x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

qui ne diffère de la première qu'en ce que l'exposant de x, dans la parenthèse, est changé de signe.

En outre, on peut supposer que m et n sont entiers; car, s'ils sont fractionnaires, on les réduira à un dénominateur commun r, et l'on posera

$$x=t^r,\quad dx=rt^{r-1}dt;$$

la différentielle proposée devient, par cette substitution,

$$rt^{mr+r-1}(a+bt^{nr})\,dt;$$

elle a conservé sa forme primitive, mais les deux exposants de la variable sont actuellement des entiers.

D'après cela, nous supposerons que m et n sont deux entiers dont le second est positif; quant à l'exposant p, il peut être un nombre rationnel quelconque.

440. Des cas d'intégrabilité. — Lorsque l'exposant p est entier, la différentielle binôme

$$(1)\qquad dV=x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

est rationnelle, et, en conséquence, elle est intégrable par les fonctions algébriques et logarithmiques. Il existe deux autres cas d'*intégrabilité;* on peut immédiatement constater ce fait au moyen de la méthode de substitution.

Posons

$$a+bx^n=t,$$

d'où

$$x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt;$$

il viendra

$$dV = \frac{1}{nb} t^p \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt,$$

et cette différentielle deviendra rationnelle par la substitution $t = z^r$, où r désigne le dénominateur de p, si l'on a

(2) $$\frac{m+1}{n} = \text{entier}.$$

De plus, nous avons vu plus haut que la différentielle dV ne change pas quand on permute les lettres a, b, et que l'on remplace m et n respectivement par $m+np$ et $-n$, ce qui change $\frac{m+1}{n}$ en $-\frac{m+1+np}{n}$; donc on pourra encore ramener cette différentielle à la forme rationnelle, si l'on a

(3) $$\frac{m+1}{n} + p = \text{entier}.$$

Lorsque l'une des conditions (2) et (3) est remplie, l'intégrale de la différentielle dV est exprimable par les fonctions algébriques et logarithmiques. Il faut remarquer que les conditions (2) et (3) s'excluent mutuellement, lorsque p est un nombre fractionnaire.

Réduction de l'intégrale d'une différentielle binôme.

441. Dans les deux cas d'intégrabilité dont il vient d'être question, l'intégration d'une différentielle binôme peut être effectuée au moyen d'une substitution propre à rendre la différentielle rationnelle; mais on peut aussi

parvenir au même résultat par un emploi convenable du procédé de l'intégration par parties. En outre, quand il s'agit d'une différentielle binôme qui ne rentre pas dans l'un des deux cas que nous venons de rappeler, il y a lieu de chercher à opérer la réduction de son intégrale, c'est-à-dire de chercher à ramener cette intégrale aux types les plus simples, et c'est à quoi l'on parvient au moyen du procédé que nous allons développer.

Soit, comme précédemment,

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

la différentielle proposée, m et n étant entiers et n positif. Cette différentielle est le produit des deux facteurs

$$x^{m-n+1},\quad (a+bx^n)^p x^{n-1}\,dx,$$

dont le deuxième est la différentielle de

$$\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb};$$

elle est aussi le produit des deux facteurs

$$(a+bx^n)^p,\quad x^m\,dx,$$

dont le deuxième est la différentielle de

$$\frac{x^{m+1}}{m+1};$$

l'intégration par parties donnera donc les deux formules suivantes :

(1)
$$\left\{\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\&\quad=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}-\frac{m-n+1}{(p+1)nb}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx,\end{aligned}\right.$$

(2)
$$\left\{\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\\&\quad=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}-\frac{pnb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx,\end{aligned}\right.$$

par lesquelles l'intégrale proposée est ramenée à une autre de même forme, et qui n'en diffère qu'en ce que les exposants m et p sont remplacés respectivement par $m-n$ et $p+1$, ou par $m+n$ et $p-1$. Il y aura une réduction obtenue si les nouveaux exposants sont tous les deux plus simples que les exposants primitifs ; au contraire, la transformation n'offrira pas d'avantage si, en simplifiant l'un des exposants, on a élevé le second. Mais on peut obtenir d'autres formules qui conviennent à tous les cas.

L'intégrale qui figure dans le second membre de la formule (1) est égale à

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)(a+bx^n)^p dx$$
$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b\int x^m(a+bx^n)^p dx;$$

de même, si l'on écrit $\dfrac{x^m(a+bx^n)-ax^m}{b}$ au lieu de x^{m+n} dans l'intégrale du second membre de la formule (2), il viendra

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx$$
$$= \frac{1}{b}\int x^m(a+bx^n)^p dx - \frac{a}{b}\int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx.$$

Ces valeurs ayant été substituées dans les formules (1) et (2), celles-ci nous donneront les deux expressions suivantes de l'intégrale proposée :

$$(3)\quad \begin{cases} \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = \dfrac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b} - \dfrac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \int x^m(a+bx^n)^p dx \\ = \dfrac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \dfrac{npa}{m+1+np}\int x^p(a+bx^n)^{p-1} dx \end{cases}$$

Changeons enfin m en $m+n$ dans la formule (3) et p en $p+1$ dans la formule (4); résolvons ensuite chacune des équations ainsi obtenues par rapport à l'intégrale qui est contenue dans son second membre, il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int x^m(a+bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int x^m(a+bx^n)^p dx \\ &= -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n(p+1)}{n(p+1)a}\int x^m(a+bx^n)^{p+1} dx. \end{aligned}\right.$$

Les formules (3), (4), (5), (6) permettent d'effectuer dans tous les cas la réduction que nous avons en vue. Il faut remarquer que les formules (3) et (4) deviennent illusoires si l'on a

$$m+1+np=0 \quad \text{ou} \quad \frac{m+1}{n}+p=0;$$

mais on est alors dans le second des deux cas d'intégrabilité, et l'intégrale proposée peut être obtenue par une transformation propre à rendre sa différentielle rationnelle, ainsi que nous l'avons vu au nº 440. Le nombre p étant supposé fractionnaire, la formule (6) n'est jamais illusoire, mais la formule (5) le devient quand $m+1=0$; on est alors dans le premier cas d'intégrabilité, et la valeur de l'intégrale proposée s'obtiendra par la méthode de substitution.

442. Examinons d'abord l'usage que l'on peut faire de nos formules dans chacun des deux cas d'intégrabilité.

1° Soit

$$\frac{m+1}{n} = e \quad \text{ou} \quad m - ne + 1 = 0,$$

e étant un entier.

Le nombre n étant plus grand que zéro, si m est positif, e sera également positif. Alors, au moyen de la formule (3), on ramènera successivement l'intégrale proposée à d'autres intégrales de même forme, et qui s'en déduiront en remplaçant l'exposant m par

$$m - n, \quad m - 2n, \quad \ldots, \quad m - (e-1)n;$$

la valeur de la dernière de ces intégrales est donnée par la même formule (3), qui, en remplaçant m par $m-(e-1)n$ et à cause de $m - ne + 1 = 0$, se réduit à

$$\int x^{m-(e-1)n}(a+bx^n)^p dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b} + \text{const.};$$

dans ce cas, l'intégrale proposée est algébrique.

Si m est négatif, e est lui-même négatif; écrivant donc $-e$ au lieu de e, on aura

$$\frac{m+1}{n} = -e \quad \text{ou} \quad m + ne + 1 = 0.$$

Alors, au moyen de la formule (5), on ramènera successivement l'intégrale proposée à d'autres intégrales de même forme, qui s'en déduisent en remplaçant m par

$$m + n, \quad m + 2n, \quad \ldots, \quad m + n(e-1);$$

mais la dernière intégrale ne sera plus susceptible de la même réduction, parce que la formule (5) devient illusoire quand on remplace m par $m + ne$, à cause de l'hypothèse $m + ne + 1 = 0$; il faut, à ce moment, revenir à la méthode de substitution du n° 440. Toutefois, on pourra, si on le juge à propos, abaisser l'exposant p en

faisant usage de l'une des formules (4) et (6), comme dans le cas qui sera développé au n° 443.

2° Supposons

$$\frac{m+1}{n}+p=1-e \quad \text{ou} \quad (m+ne)+1+np=0,$$

e étant toujours un entier. Ce cas ne diffère du précédent que par un changement de notation, ainsi qu'on l'a vu n° 440; au reste, on aperçoit immédiatement que, si $m+1+np$ est négatif, la formule (5) ramène successivement l'intégrale proposée à d'autres de même forme, qui s'en déduisent par le changement de m en

$$m+n, \quad m+2n, \quad \ldots, \quad m+(e-1)n$$

la dernière de ces intégrales est donnée par la même formule (5) qui, en remplaçant m par $m+(e-1)n$, se réduit à

$$\int x^{m+(e-1)n}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+(e-1)n+1}(a+bx^n)^p}{(m+1)a} + \text{const.}$$

Lorsque $m+np+1$ est positif, si l'on désigne sa valeur par ne, la formule (3) ramènera l'intégrale proposée à une autre de même forme, qui n'en diffère que par le changement de m en $m-(e-1)n$; mais la valeur de cette dernière intégrale devra être cherchée par la méthode de substitution.

443. Faisons maintenant abstraction des deux cas d'intégrabilité. Les formules (3) et (5) montrent que l'intégrale proposée peut être ramenée à une autre, qui n'en diffère qu'en ce que l'exposant m s'y trouve remplacé par $m\pm in$, i étant un entier positif que l'on peut prendre à volonté. On peut choisir cet entier de manière que $m\pm in$ soit compris entre deux multiples consécutifs quelconques de n, par exemple entre zéro et n; on peut

aussi déterminer le nombre i de manière que $m+in$ soit compris entre $-\frac{n}{2}$ et $+\frac{n}{2}$.

Ensuite on voit, par les formules (4) et (6), que l'intégrale proposée peut être ramenée à une autre qui n'en diffère qu'en ce que l'exposant p est remplacé par $p\pm j$, j étant un entier positif quelconque. Or, quel que soit p, on choisit l'entier j de manière que $p\pm j$ soit compris entre deux entiers consécutifs quelconques, par exemple entre zéro et 1, ou, si l'on veut, de manière que $p\pm j$ soit compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

Donc, en résumé, tous les cas des différentielles binômes qui ne rentrent pas dans ceux d'intégrabilité peuvent être ramenés au cas où les nombres p et $\frac{m}{n}$ sont compris l'un et l'autre entre zéro et 1 ou entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, à volonté.

444. L'exposant n, qui figure dans la différentielle binôme, peut être réduit à l'unité, mais alors l'exposant m devient fractionnaire. Soit

$$x^n=t,\quad \text{d'où}\quad x=t^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt;$$

posons en outre

$$\frac{m+1}{n}-1=q,$$

on aura

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}t^q(a+bt)^p dt.$$

Les cas d'intégrabilité sont alors ceux où l'un des nombres p, q, $p+q$ est entier, et l'on peut toujours ramener l'intégrale d'une différentielle binôme, qui ne tombe

pas dans l'un de ces cas, à la forme

$$\int t^q (a + bt)^p dt,$$

p et q étant compris entre zéro et 1 ou entre deux entiers consécutifs quelconques. On peut même obtenir une forme plus simple en posant

$$t = \pm \frac{a}{b} z, \quad dt = \pm \frac{a}{b} dz,$$

car la précédente intégrale devient, par cette substitution,

$$\int z^q (1 \pm z)^p dz,$$

en faisant abstraction d'un multiplicateur constant.

445. Exemples. — 1° Considérons en premier lieu l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, où m est un nombre entier; cette intégrale appartient à la classe de celles que nous venons d'étudier; on a ici $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, et, comme l'un des nombres $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m}{2}$ est entier, la condition d'intégrabilité se trouve remplie. La formule (3) du n° 441 devient, dans le cas actuel,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1 - x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Supposons d'abord m positif et faisons successivement $m = 2\mu + 1$, $m = 2\mu$, μ étant un entier. Dans le cas de m impair, l'intégrale proposée est algébrique, et la formule précédente fait connaître sa valeur; lorsque m est pair, la même formule ramène l'intégrale proposée

à $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ dont la valeur est

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + \text{const.}:$$

on trouve, en désignant par C une constante arbitraire,

$$\int \frac{x^{2\mu+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu+1}\left[x^{2\mu} + \frac{2\mu}{2\mu-1}x^{2\mu-2} + \frac{2\mu(2\mu-2)}{(2\mu-1)(2\mu-3)}x^{2\mu-4} + \ldots + \frac{2\mu(2\mu-2)\ldots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 1}\right] + C,$$

et

$$\int \frac{x^{2\mu}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[x^{2\mu-1} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}x^{2\mu-3} + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)}x^{2\mu-5} + \ldots + \frac{(2\mu-1)\ldots 3}{(2\mu-2)\ldots 2}x\right]$$
$$+ \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 1}{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}\operatorname{arc}\sin x + C.$$

Lorsque m est négatif, il faut recourir à la formule (5) du n° 441, ou, ce qui revient au même, changer m en $m+2$ dans la formule écrite plus haut et la résoudre ensuite par rapport à l'intégrale qui est contenue dans son second membre; on a ainsi

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m+1}\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous ferons successivement $m = -2\mu$, $m = -(2\mu+1)$: dans le premier cas, l'intégrale proposée est algébrique; dans le second cas, elle se ramène à l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ qu'on peut rendre rationnelle par une substitution, mais qu'on réduit plus simplement à une

forme connue en remplaçant x par $\frac{1}{t}$; on a ainsi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) + \text{const.}$$

ou

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{const.}$$

On trouve, d'après cela, en désignant par C une constante arbitraire.

$$\int \frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu-1}\left[\frac{1}{x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-3}\frac{1}{x^{2\mu-3}} + \ldots + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}{(2\mu-3)(2\mu-5)\ldots 3}\frac{1}{x}\right] + \text{C},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[\frac{1}{x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}\frac{1}{x^{2\mu-2}} + \ldots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\ldots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\ldots 2}\frac{1}{x^2}\right]$$
$$+ \frac{(2\mu-1)(2\mu-2)\ldots 3.1}{2\mu(2\mu-2)\ldots 1}\log\frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{C}.$$

2° On pourrait opérer de la même manière pour déterminer l'intégrale

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

mais il est beaucoup plus simple de la déduire de celle que nous venons de considérer; elle est effectivement égale à la valeur que prend l'intégrale $-\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, quand on change, dans celle-ci, x en $\frac{1}{x}$ et m en $-(m+1)$.

3° L'intégrale

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

se ramène aussi à celle dont nous avons développé le calcul; car, si l'on pose

$$x = at^2, \quad dx = 2at\,dt,$$

on aura

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = 2a^m \int \frac{t^{2m}\,dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

ce qui nous fait rentrer dans le premier exemple. En remarquant que

$$\arc\sin t = \arc\sin \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{1}{2} \arc\cos \frac{a-2x}{a},$$

on trouve, dans le cas où m est un entier positif,

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{ax-x^2}}{m}\Bigg[x^{m-1} + \frac{2m-1}{2m-2}\,ax^{m-2} + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}\,a^2x^{m-3} + \ldots + \frac{(2m-1)\ldots3}{(2m-2)\ldots2}\,a^{m-1}\Bigg] + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots1}{2m(2m-2)\ldots2}\,a^m \arc\cos\frac{a-2x}{a};$$

dans le cas de m entier et négatif, on a, en mettant $-m$ au lieu de m,

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{2\sqrt{ax-x^2}}{(2m-1)a^{m-1}x^m}\Bigg[a^m + \frac{2m-2}{2m-3}\,a^{m-1}x + \ldots + \frac{(2m-2)\ldots2}{(2m-3)\ldots1}\,ax^{m-1}\Bigg] + \text{C}.$$

De quelques différentielles binômes dont l'intégrale se ramène aux fonctions elliptiques.

446. Une différentielle binôme qui a été réduite par la méthode que nous venons d'exposer est quelquefois susceptible d'une nouvelle réduction ; mais on ne peut rien établir de général à cet égard, aussi nous bornerons-nous à présenter ici deux exemples dans lesquels l'intégrale de la différentielle proposée se ramène aux fonctions elliptiques.

Considérons d'abord la différentielle

(1) $$dV = \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}};$$

on peut écrire

$$dV = \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{x^3}}},$$

et il est naturel d'essayer une substitution non rationnelle, telle que

(2) $$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

t étant une nouvelle variable qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \infty$; on tire de là

(3) $$x^3 - \frac{1}{x^3} = -2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^3};$$

tant que la variable x est positive, on doit prendre le facteur $t^{-\frac{3}{2}}$ avec le signe $+$, mais il faut donner au radical $\sqrt{1-t^3}$ le signe $+$, si x est < 1 et le signe $-$ dans le cas contraire. La différentiation de l'équation (2) donne

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)\frac{dx}{x} = -t^{-\frac{5}{2}}dt;$$

d'où, par la formule (3),

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t\sqrt{1-t^3}};$$

on a donc

(4) $$dV = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{t-t^4}};$$

et, par conséquent, l'intégrale V peut être ramenée aux fonctions elliptiques par la méthode du n° 429.

Considérons encore la différentielle binôme

$$(5) \qquad dV = \frac{dx}{(1 - x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

On peut employer ici avec succès la substitution

$$(6) \qquad \sqrt[3]{1 - x^3} = (1 - x)\,t;$$

on a, par la différentiation,

$$\frac{dx}{(1 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1 - x}{1 + x}\,dt = dV;$$

d'ailleurs la formule (6) élevée au cube donne encore

$$t^3 = \frac{\frac{3}{4}(1 + x)^2 + \frac{1}{4}(1 - x)^2}{(1 - x)^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3 - 1}},$$

et, par conséquent,

$$(7) \qquad dV = \sqrt{3}\,\frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 1}};$$

l'intégrale V peut donc encore se ramener aux fonctions elliptiques par la méthode du n° 429.

Intégration de quelques différentielles transcendantes.

447. Lorsqu'une différentielle transcendante, dont on demande l'intégrale, peut être ramenée à la forme algébrique par une substitution, il convient en général d'exécuter la réduction. Ainsi, f désignant une fonction

algébrique, les intégrales

$$\int f(e^{mx})\, e^{mx}\, dx, \qquad \int f(\log x)\, \frac{dx}{x},$$

$$\int f(\sin x)\cos x\, dx, \qquad \int f(\cos x)\sin x\, dx, \qquad \int f(\operatorname{tang} x)\frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$\int f(\operatorname{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int f(\operatorname{arc}\operatorname{tang} x)\frac{dx}{1+x^2}, \ldots$$

se ramèneront à des intégrales différentielles algébriques en posant

$$t = e^{mx},\ \log x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tang} x,\ \operatorname{arc}\sin x,\ \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,\ \ldots.$$

448. Soient z une fonction transcendante de la variable x et X une fonction quelconque de la même variable ; si n est un entier positif, et que l'on sache trouver des fonctions

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{n+1},$$

ayant respectivement pour dérivées

$$X,\ X_1\frac{dz}{dx},\ \ldots,\ X_n\frac{dz}{dx},$$

on pourra aussi déterminer l'intégrale

$$\int X z^n\, dx.$$

L'intégration par parties donne effectivement

$$\int X z^n\, dx = \int z^n \frac{dX_1}{dx}\, dx = X_1 z^n - n\int X_1 z^{n-1}\frac{dz}{dx}\, dx,$$

$$\int X_1 z^{n-1}\frac{dz}{dx}\, dx = \int z^{n-1}\frac{dX_2}{dx}\, dx$$
$$= X_2 z^{n-1} - (n-1)\int X_2 z^{n-2}\frac{dz}{dx}\, dx,$$

. . . . ,

$$\int X_{i-1} z^{n-i+1}\frac{dz}{dx}\, dx = \int z^{n-i+1}\frac{dX_i}{dx}\, dx$$
$$= X_i z^{n-i+1} - (n-i+1)\int X_i z^{n-i}\frac{dz}{dx}\, dx,$$

d'où l'on conclut

$$(1)\left\{\begin{aligned}\int X z^n\,dx &= X_1 z^n - nX_2 z^{n-1} + n(n-1)X_3 z^{n-2} - \ldots\\ &\pm n(n-1)\ldots(n-i+2)X_i z^{n-i+1}\\ &\mp n(n-1)\ldots(n-i+1)\int X_i z^{n-i}\frac{dz}{dx}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Si n est un entier positif, comme nous l'avons supposé, on fera $i = n+1$, et il viendra

$$(2)\left\{\begin{aligned}\int X z^n\,dx &= X_1 z^n - nX_2 z^{n-1} + n(n-1)X_3 z^{n-2} - \ldots\\ &\pm n(n-1)\ldots 1\,.\,X_{n+1} + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

449. Exemples. — Considérons l'intégrale

$$\int x^{m-1}\log x^n\,dx,$$

où n désigne un nombre entier et positif; on a ici

$$z = \log x,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},\quad X = x^{m-1},$$

et l'on peut faire

$$X_1 = \frac{x^m}{m},\quad X_2 = \frac{x^m}{m^2},\quad X_3 = \frac{x^m}{m^3},\quad \ldots;$$

on aura donc

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\int x^{m-1}\log^n x\,dx\\ &= \frac{x^m}{m}\left[\log^n x - \frac{n}{m}\log^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{m^2}\log^{n-2}x - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}\right] + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Si l'on écrit e^x, x, $e^x dx$ au lieu de x, $\log x$, dx, la formule précédente deviendra

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\int e^{mx}x^n\,dx\\ &= \frac{e^{mx}}{m}\left[x^n - \frac{n}{m}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}\right] + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Ce résultat ne diffère que dans la forme de celui qui a été obtenu au n° 415.

2° Soit en second lieu l'intégrale

$$\int (\text{arc}\sin x)^n dx,$$

n étant un entier positif; on a ici

$$z = \text{arc}\sin x, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad X = 1,$$

et l'on peut faire

$$X_1 = x, \quad X_2 = -\sqrt{1-x^2}, \quad X_3 = -x, \quad X_4 = +\sqrt{1-x^2},$$

après quoi les mêmes valeurs reviennent périodiquement. On a donc

$$(5)\quad \begin{cases} \int (\text{arc}\sin x)^n dx \\ \quad = x[(\text{arc}\sin x)^n - n(n-1)(\text{arc}\sin x)^{n-2} + \ldots] \\ \qquad + \sqrt{1-x^2}[n(\text{arc}\sin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\text{arc}\sin x)^{n-3} + \ldots] \\ \qquad + \text{const.} \end{cases}$$

Si, dans cette formule (5), on écrit x, $\sin x$, $\cos x$, au lieu de $\text{arc}\sin x$, x, $\sqrt{1-x^2}$, on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \int x^n \cos x\, dx = \sin x[x^n - n(n-1)x^{n-2} + \ldots] \\ \qquad + \cos x[n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} - \ldots] + \text{const.} \end{cases}$$

450. Revenons à la formule (4) du numéro précédent. Les différentielles des deux membres sont identiquement égales entre elles, quelle que soit la constante m, et l'identité ne sera point altérée si l'on suppose cette constante imaginaire. Soit donc $m = a + b\sqrt{-1}$, il viendra

$$\int x^n e^{(a+b\sqrt{-1})x} dx$$
$$= \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}}\left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{a+b\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(a+b\sqrt{-1})^n}\right] + \text{const.}$$

Remplaçant $e^{(a+b\sqrt{-1})x}$ par sa valeur

$$e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx),$$

et égalant ensuite, de part et d'autre, les parties réelles et les parties affectées du facteur $\sqrt{-1}$, on aura les valeurs des deux intégrales

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx,$$

dans le cas où n est un entier positif. Si l'on fait

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha),$$

on trouvera ainsi

$$\begin{aligned}\int & x^n e^{ax}\cos bx\,dx \\ &= e^{ax}\Big[\frac{1}{\rho}x^n\cos(bx-\alpha) - \frac{n}{\rho^2}x^{n-1}\cos(bx-2\alpha) + \ldots \\ &\qquad \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{\rho^{n+1}}\cos(bx-\overline{n+1}\,\alpha)\Big] + \text{const.},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int & x^n e^{ax}\sin bx\,dx \\ &= e^{ax}\Big[\frac{1}{\rho}x^n\sin(bx-\alpha) - \frac{n}{\rho^2}x^{n-1}\sin(bx-2\alpha) + \ldots \\ &\qquad \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{\rho^{n+1}}\sin(bx-\overline{n+1}\,\alpha)\Big] + \text{const.}\end{aligned}$$

Il importe de remarquer le cas de $n = 0$; on a

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{\rho}e^{ax}\cos(bx-\alpha) + \text{const.},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{\rho}e^{ax}\sin(bx-\alpha) + \text{const.},$$

ou

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + \text{const.},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + \text{const.}$$

On obtient directement ces deux formules en intégrant par parties les deux différentielles $e^{ax}\cos bx\,dx$, $e^{ax}\sin bx\,dx$; car, en opérant ainsi, on forme deux relations entre les intégrales de ces différentielles, desquelles on peut tirer les expressions que nous venons de trouver.

451. La méthode du n° 448, et plus généralement le procédé de l'intégration par parties, permettent souvent de réduire à des formes plus simples certaines intégrales dont la valeur n'est pas exprimable par les fonctions algébriques, logarithmiques, etc.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n}\,dx,$$

dans laquelle n représente un entier positif. Comme $\frac{dx}{x^n}$ est la différentielle de $-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$, l'intégration par parties donnera

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n}\,dx = -\frac{e^{-x}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{e^{-x}}{x^{n-1}}\,dx,$$

et, au moyen de cette formule, on ramènera l'intégrale proposée à

$$\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Intégration des différentielles de la forme Pdx, P *étant un produit de sinus ou de cosinus de fonctions linéaires de* x.

452. Les différentielles de cette forme se présentent dans un grand nombre de questions, et il est aisé d'en avoir l'intégrale. Soit d'abord

$$P = \cos(ax+b)\cos(a'x+b'),$$

on peut écrire

$$P = \frac{1}{2}\cos[(a+a')x + (b+b')] + \frac{1}{2}\cos[(a-a')x + (b-b')];$$

on aura donc, si $a + a'$ et $a - a'$ sont différents de zéro,

$$\int P\,dx = \frac{\sin[(a+a')x + (b+b')]}{2(a+a')} + \frac{\sin[(a-a')x + (b-b')]}{2(a-a')} + \text{const.},$$

et, dans le cas de $a' = a$,

$$\int P\,dx = \frac{\sin(2ax + b + b')}{4a} + \frac{x\cos(b-b')}{2} + \text{const.}$$

On opérera de la même manière, dans le cas où P est un produit

$$P = \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots$$

d'un nombre quelconque n de facteurs. Si l'on fait

$$\alpha = a \pm a' \pm a'' \pm \ldots, \qquad \beta = b \pm b' \pm b'' \pm \ldots,$$

le produit P sera la somme des 2^{n-1} termes représentés par l'expression

$$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(\alpha x + \beta);$$

on aura donc

$$\int P\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\sum \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha} + \text{const.},$$

le terme $\dfrac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$ devant être remplacé par $x\cos\beta$ quand α est nul.

Nous avons représenté tous les facteurs de P par des cosinus, parce que chaque facteur tel que $\sin(ax+b)$ peut être remplacé par $\cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$.

453. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int \cos^n x\,dx,$$

où n est un entier positif. On a, si n est pair (*voir* mon *Traité de Trigonométrie*),

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}},$$

et, si n est impair,

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos x.$$

Donc on a, pour le cas de n pair,

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\,\frac{x}{2} + \text{const.},$$

et, pour le cas de n impair,

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n-1}{2}+2\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin x + \text{const.}$$

En changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$, dans ces formules, on obtiendra la valeur de $\int \sin^n x\,dx$; on trouvera, dans ce qui va suivre, de nouvelles formes des mêmes intégrales.

Intégration des différentielles de la forme $\sin^m x \cos^n x\,dx$.

454. La différentielle dont il s'agit ici est réductible à une différentielle binôme; car, si l'on pose

$$\sin x = t^{\frac{1}{2}}, \quad \cos x = (1 - t)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

elle devient

$$\frac{1}{2} t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt;$$

cette différentielle est intégrable quand l'un des membres

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

est entier, et, dans le cas contraire, elle peut être susceptible de réduction, ainsi qu'on l'a vu au n° 443.

On retrouve les mêmes résultats en appliquant directement la règle de l'intégration par parties à la différentielle $\sin^m x \cos^n x\,dx$, et, comme les expressions de ce genre se présentent fréquemment, il ne sera pas inutile de développer le calcul.

La différentielle proposée peut être mise sous la forme

$$\cos^{n-1} x \times \sin^m x \cos x\,dx;$$

le second facteur est la différentielle de $\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$; par con-

séquent, l'intégration par parties donnera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\int \sin^m x \cos^n x\,dx\\ &\quad = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx;\end{aligned}\right.$$

supprimons sous le signe $\int$, dans l'intégrale du second membre, un facteur $\sin^2 x$ et introduisons à sa place le facteur égal $1-\cos^2 x$, cette intégrale deviendra la différence des deux suivantes :

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx - \int \sin^m x \cos^n x\,dx;$$

faisant passer la seconde dans le premier membre, et multipliant ensuite par $\frac{m+1}{m+n}$, il viendra

$$(2)\quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

Si l'on change x en $\frac{\pi}{2}-x$, dx en $-dx$, que l'on permute les lettres m, n, puis qu'on multiplie par -1, on aura encore

$$(3)\quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx.$$

Enfin, si l'on remplace n par $n+2$ dans l'équation (2), m par $m+2$ dans l'équation (3), et qu'on résolve ensuite chaque équation par rapport à l'intégrale contenue dans son second membre, on aura les deux nouvelles formules

$$(4)\quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\,dx,$$

$$(5)\quad \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\,dx.$$

Les formules (4) et (5) sont illusoires, la première quand $n = -1$, la seconde quand $m = -1$; mais, dans l'un et l'autre cas, la condition d'intégrabilité est remplie. Les formules (2) et (3) deviennent elles-mêmes illusoires quand $m + n = 0$, ce qui répond encore à un cas d'intégrabilité; mais alors la formule (1) nous fournit une réduction; elle devient en effet, pour $n = -m$,

$$(6) \qquad \int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x\,dx,$$

ou, en écrivant $m - 2$ au lieu de m,

$$(7) \qquad \int \operatorname{tang}^m x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\,dx.$$

Laissant de côté les cas d'intégrabilité, qui se ramènent toujours, quand cela est nécessaire, à celui d'une différentielle rationnelle, on voit que les formules (2) et (4) permettent de diminuer ou d'augmenter l'exposant n d'un nombre pair quelconque; pareillement, au moyen des formules (3) et (5), on peut diminuer ou augmenter l'exposant m d'un nombre pair quelconque; donc il est possible de ramener les deux exposants à être compris entre les limites -1 et $+1$ ou 0 et 2.

Dans le cas particulier où les exposants m et n sont entiers, on pourra poursuivre la réduction de chacun de ces exposants tant qu'il ne sera pas égal à -1 ou égal à l'autre exposant changé de signe; quand ce dernier cas se présente, on a recours aux formules (6) et (7), au moyen desquelles on peut continuer la réduction jusqu'à ce que les deux exposants soient nuls ou égaux à $+1$ et à -1. Nous ajouterons que les formules (6) et (7) peuvent être obtenues immédiatement, en remarquant que

$$\int \operatorname{tang}^m x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} + \text{const.}$$

455. On voit, en résumé, que l'intégrale

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

dans laquelle m et n sont des entiers positifs ou négatifs, se ramènera toujours, au moyen de nos formules, à l'une des suivantes :

$$\int dx, \quad \int \sin x \, dx, \quad \int \cos x \, dx, \quad \int \sin x \cos x \, dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \operatorname{tang} x \, dx, \quad \int \cot x \, dx.$$

Les trois premières ont pour valeurs

$$x + C, \quad -\cos x + C, \quad \sin x + C,$$

C étant une constante; la quatrième est égale à

$$\frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C,$$

C désignant toujours une constante arbitraire.

On a ensuite

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{\dfrac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x},$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + C,$$

ce qui s'accorde avec ce qui a été dit au n° 44. Changeant dans la précédente formule x en $x + \frac{\pi}{2}$, puis en $2x$,

il vient

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log \operatorname{tang} x + C.$$

On a enfin

$$\int \operatorname{tang} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\log \cos x + C,$$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \log \sin x + C.$$

456. Si le nombre n est nul, la formule (3) du n° 454 donnera, dans le cas de m pair et positif,

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5} x + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2}\sin x\right] + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2}\frac{x}{m} + \text{const.},$$

et, dans le cas de m impair,

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right] + \text{const.}$$

En changeant x en $\frac{\pi}{2} + x$, on aura deux autres formules qui donneront la valeur de

$$\int \cos^m x\, dx,$$

pour le cas de m pair et pour celui de m impair. Il faut remarquer que ces formules peuvent se déduire immédia-

tement de celle du n° 445, en remplaçant dans celles-ci x par $\sin x$ ou par $\cos x$.

457. L'intégrale

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

se ramène immédiatement à l'une de celles dont il vient d'être question, en posant

$$a = r\sin\alpha,\quad b = r\cos\alpha;$$

car elle devient alors

$$\frac{1}{r}\int \frac{dx}{\cos(x-\alpha)}.$$

On peut aussi déterminer l'intégrale plus générale

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

car, en faisant

$$a = r\sin\alpha,\quad b = r\cos\alpha,\quad \frac{c-r}{c+r} = \pm k^2,$$

on a

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r}\int \frac{\dfrac{k\,dx}{2\cos^2\frac{1}{2}(x-\alpha)}}{1 \pm k^2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}(x-\alpha)},$$

ou, en posant $k\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-\alpha) = t$,

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c-r}\int \frac{dt}{1 \pm t^2};$$

et l'intégrale du second membre de cette formule a pour valeur $\operatorname{arc\,tang} t$ ou $\log\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, selon que $\pm k^2$ est positif ou négatif.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET DES INTÉGRALES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Propriétés fondamentales des intégrales définies.

458. Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x qui reste continue quand x varie entre les limites x_0, X, et $F(x)$ une des valeurs de l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$. La différence $F(x) - F(x_0)$ est aussi une des valeurs de la même intégrale, savoir, celle qui s'annule pour $x = x_0$; cette valeur est égale à $F(X) - F(x_0)$ pour $x = X$, et nous sommes convenus alors de la représenter par l'expression $\int_{x_0}^{X} f(x) dx$, que nous avons nommée une intégrale définie. Ainsi l'on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x) dx = F(X) - F(x_0),$$

et nous savons que l'intégrale contenue dans cette formule est égale à la limite vers laquelle tend la somme des valeurs que prend la différentielle $f(x) dx$, quand x varie de x_0 à X en prenant des accroissements infiniment petits successifs égaux à dx.

De là résultent plusieurs propriétés fondamentales que nous allons établir.

459. Théorème I. — *Une intégrale définie change de signe en conservant la même valeur absolue, quand on permute les limites de l'intégrale.*

Cela résulte immédiatement de la formule du n° 458, dont le second membre ne fait que changer de signe quand on permute les lettres x_0, X.

On peut aussi établir la même propriété en considérant les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int_{X}^{x_0} f(x)\,dx$$

comme des limites de sommes d'éléments infiniment petits. Les éléments correspondants $f(x)\,dx$ des deux sommes en question ont la même valeur absolue, mais ils sont de signes contraires, car, x variant de x_0 à X dans un cas et de X à x_0 dans l'autre cas, dx est positif pour l'une des deux sommes et négatif pour l'autre.

460. Théorème II. — *Si*

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ X$$

sont des valeurs de x telles que $f(x)$ reste bien déterminée et continue quand x varie de l'une de ces valeurs à la suivante, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

En effet, cette formule n'est autre chose que l'égalité identique

$$\begin{aligned}&F(X) - F(x_0)\\ &\quad = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(X) - F(x_{n-1})].\end{aligned}$$

On peut encore démontrer la formule dont il s'agit en regardant les intégrales définies comme des limites de sommes. Si x_0, x_1, ..., X sont disposées par ordre de grandeur, les deux membres de notre formule sont égaux à la limite d'une même somme d'éléments infiniment petits. Il en est de même quand x_0, x_1, ..., X ne sont

pas disposées par ordre de grandeur, car les éléments infiniment petits de la seconde somme qui ne se trouvent pas dans la première sont égaux deux à deux et de signes contraires.

461. Théorème III. — *Soient $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux fonctions qui restent continues pour les valeurs de x comprises entre les limites x_0 et $X > x_0$; si pour toutes les valeurs de x on a $f(x) > \varphi(x)$, on aura aussi*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx.$$

En effet, par hypothèse, la fonction $f(x) - \varphi(x)$ est positive pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X; par conséquent, la fonction

$$\int_{x_0}^{x} [f(x) - \varphi(x)]\,dx,$$

dont elle est la dérivée, est croissante. Or cette fonction s'annule pour $x = x_0$; donc elle est positive pour $x = X$, et l'on a

$$\int_{x_0}^{X} [f(x) - \varphi(x)]\,dx > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx > 0.$$

On arrive plus rapidement à ce résultat en considérant les deux intégrales proposées comme des limites de sommes; effectivement, chaque élément $f(x)\,dx$ de la première somme est plus grand que l'élément correspondant $\varphi(x)\,dx$ de la seconde; celle-ci est donc inférieure à l'autre.

Corollaire. — *Si la fonction $f(x)$ est comprise entre deux autres fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X, et que ces fonctions soient continues de $x = x_0$ à $x = X$, on obtiendra deux*

limites de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *en prenant* $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$ *et* $\int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx$.

462. Exemple. — Soit l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$, où l'on suppose $m > 2$. Il est évident que cette intégrale augmentera si l'on diminue m, et qu'elle diminuera si l'on augmente m ; elle est donc comprise entre

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

c'est-à-dire entre

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{et} \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,523\ldots$$

463. Théorème IV. — *Soient* u *et* v *deux fonctions de* x : *si la fonction* v *conserve le même signe quand* x *varie de* x_0 *à* X, *on aura*

$$\int_{x_0}^{X} uv\,dx = \mathrm{U}\int_{x_0}^{X} v\,dx,$$

U *désignant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend* u *quand* x *varie de* x_0 *à* X.

En effet, soient A et B la plus petite et la plus grande des valeurs de u ; on aura constamment, si v est positif,

$$\mathrm{A}v < uv < \mathrm{B}v,$$

et, si v est négatif,

$$\mathrm{A}v > uv < \mathrm{B}v;$$

donc l'intégrale $\int_{x_0}^{X} uv\,dx$ est comprise entre $\int_{x_0}^{X} \mathrm{A}v\,dx$

et $\int_{x_0}^{X} \mathrm{B}v\,dx$, c'est-à-dire entre les deux produits que l'on obtient en multipliant A et B par l'intégrale $\int_{x_0}^{X} v\,dx$; de là résulte évidemment l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

Cas où les limites des intégrales sont infinies.

464. En traitant des propriétés des intégrales définies $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, nous avons supposé la fonction $f(x)$ continue pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X; ces limites sont d'ailleurs des quantités déterminées quelconques. Nous maintiendrons ici la même hypothèse; mais nous supposerons x_0 et X variables, et nous allons examiner le cas dans lequel l'une ou l'autre de ces limites devient infinie.

L'intégrale de la différentielle $f(x)\,dx$, prise entre deux limites infinies, ou entre une limite finie et une limite infinie, peut avoir une valeur finie; elle peut aussi être infinie ou indéterminée; nous allons donner des exemples de ces divers cas.

1° Considérons d'abord la différentielle $e^{-x}\,dx$; en l'intégrant de $x = x_0$ à $x = \mathrm{X}$, on a

$$\int_{x_0}^{X} e^{-x}\,dx = e^{-x_0} - e^{-X},$$

et, si l'on fait tendre X vers $+\infty$, on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}\,dx = e^{-x_0};$$

faisant tendre au contraire x_0 vers $-\infty$, on a

$$\int_{-\infty}^{X} e^{-x}\,dx = \infty.$$

2° Soit, en deuxième lieu, la différentielle $\frac{dx}{1+x^2}$; l'intégrale prise de $x = x_0$ à $x = X$ est

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang} X - \text{arc tang} x_0,$$

et, si l'on fait tendre X vers $+\infty$, on a

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang} x_0;$$

faisant ensuite tendre x_0 vers $-\infty$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3° Soit encore la différentielle $\cos x\, dx$; on a

$$\int_0^X \cos x\, dx = \sin X,$$

et il est évident que cette intégrale cesse d'être déterminée quand on suppose $X = \infty$.

465. On ne peut pas indiquer de critérium qui permette de décider d'une manière générale si l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ reste finie et déterminée quand l'une ou l'autre des limites tend vers l'infini. Voici cependant un théorème qui donne le moyen de décider la question dans un assez grand nombre de cas.

Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction qui reste finie pour les valeurs de x comprises entre x_0 et $+\infty$. Si, pour les valeurs de x supérieures à une certaine quantité α, la valeur absolue du produit $x^n f(x)$ est constamment inférieure à un nombre donné K, et que l'expo-*

sant n soit supérieur à 1, *l'intégrale* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *tendra vers une limite finie quand on fera tendre* X *vers* $+\infty$.

Au contraire, si pour les valeurs de x supérieures à une quantité α la fonction $f(x)$ *conserve le même signe, et que la valeur absolue du produit* $x^n f(x)$ *ne soit jamais inférieure à un nombre donné* K, *l'exposant n étant égal ou inférieur à* 1, *l'intégrale* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *deviendra infinie en même temps que* X.

En effet, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx;$$

la première des intégrales du second membre a une valeur déterminée, et il suffit en conséquence de considérer la seconde.

1° Si la valeur absolue du produit $x^n f(x)$ est inférieure à K, pour les valeurs de x comprises entre α et $+\infty$, il est évident que la valeur absolue de l'intégrale $\int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ est elle-même inférieure à

$$\int_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx = \frac{K}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right),$$

quantité qui, dans l'hypothèse de $n > 1$, se réduit, pour $X = \infty$, à $\frac{K}{(n-1)\alpha^{n-1}}$. Donc l'intégrale $\int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx$ reste finie pour $X = \infty$, et, par conséquent, il en est de même de la proposée.

2° Si la valeur absolue du produit $x^n f(x)$ n'est pas inférieure au nombre donné K pour les valeurs de x comprises entre α et ∞, et qu'en outre la fonction $f(x)$

conserve le même signe, la valeur absolue de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ est supérieure à $\int_{\alpha}^{X} \frac{K}{x^n}\,dx$. Cette dernière intégrale a pour valeur

$$\frac{K}{1-n}(X^{1-n} - \alpha^{1-n}),$$

quand n est < 1, et

$$K \log \frac{X}{\alpha},$$

quand $n = 1$; dans l'un et l'autre cas, elle devient infinie pour $X = \infty$; donc la même chose a lieu à l'égard de l'intégrale proposée.

Remarque. — Le théorème précédent s'applique au cas où l'on fait tendre X vers $-\infty$; car, en changeant x en $-x$, on a,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{-x_0}^{-X} f(-x)\,dx,$$

et l'on est ramené à faire tendre vers $+\infty$ la limite supérieure $-X$.

Le même théorème est encore applicable dans le cas où l'on fait tendre la limite inférieure x_0 vers $\pm\infty$, puisqu'on peut permuter les deux limites entre elles.

466. Exemple. — Considérons l'intégrale $\int_{x_0}^{X} e^{-x^2}\,dx$. Soit n un nombre positif aussi grand qu'on voudra, K une quantité positive donnée quelconque. La valeur absolue du produit $x^n e^{-x^2}$ tend vers zéro, quand x tend vers $\pm\infty$; donc on peut assigner une valeur α de x telle, que de $x = +\alpha$ à $x = +\infty$, ou de $x = -\alpha$ à $x = -\infty$, la valeur absolue du produit $x^n e^{-x^2}$ soit inférieure à K. Il en

résulte que l'intégrale proposée conserve une valeur finie $\int_{-\infty}^{+} e^{-x^2}dx$, quand on fait tendre X vers $+\infty$ et x_0 vers $-\infty$.

Plus généralement, si $f(x)$ est une fonction de x qui reste finie pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx$ aura une valeur finie.

Cas où la fonction contenue sous le signe $\int$ devient infinie aux limites de l'intégrale.

467. Supposons que la fonction $f(x)$ reste finie pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, mais qu'elle devienne infinie pour $x = \mathrm{X}$. Dans ce cas, si l'on désigne par ε une quantité de même signe que $\mathrm{X} - x_0$, l'intégrale $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$ est la limite vers laquelle tend

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

quand on fait tendre ε vers la limite zéro. Il peut arriver que la précédente intégrale croisse au delà de toute limite, et alors la proposée est infinie.

Pareillement, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour $x = x_0$, et que l'on désigne toujours par ε une quantité de même signe que $\mathrm{X} - x_0$, l'intégrale $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$ sera la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int_{x_0+\varepsilon}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$, quand on fait tendre ε vers zéro.

Nous allons démontrer un théorème analogue à celui du n° 465 et au moyen duquel on peut décider, dans cer-

tains cas, si une intégrale conserve une valeur finie quand la fonction qui multiplie dx sous le signe $\int$ devient infinie aux limites de l'intégrale.

468. Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction qui reste finie pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, mais qui devienne infinie pour $x = X$. Si l'on peut assigner une quantité α entre x_0 et X, telle que pour les valeurs de x comprises entre α et X la valeur absolue du produit $(X - x)^n f(x)$ ou $(x - X)^n f(x)$ soit inférieure à une quantité déterminée K, le nombre n étant moindre que 1, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ aura une valeur finie.*

Au contraire, si l'on peut assigner une quantité α entre x_0 et X, telle que pour les valeurs de x comprises entre α et X le produit $(X - x)^n f(x)$ ou $(x - X)^n f(x)$ conserve le même signe et soit constamment supérieur à une quantité déterminée K, le nombre n étant égal à 1 ou plus grand que 1, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ sera infinie.

En effet, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{X} f(x)\,dx;$$

la première des intégrales du second membre a une valeur finie ; il suffit, en conséquence, de considérer la deuxième intégrale.

1° Supposons que de $x = \alpha$ à $x = X$ la valeur absolue du produit $[\pm(X - x)]^n f(x)$ soit moindre que la quantité déterminée K, le nombre n étant en outre inférieur à 1 ; il est évident que la valeur absolue de l'in-

tégrale $\int_\alpha^X f(x)\,dx$ sera inférieure à la valeur absolue de $\int_\alpha^X \frac{K\,dx}{[\pm(X-x)]^n}$. Mais l'intégrale indéfinie de $\frac{K\,dx}{[\pm(X-x)]^n}$ a pour valeur $\frac{\mp K[\pm(X-x)]^{1-n}}{1-n}+\text{const.}$; on a donc, à cause de $n<1$,

$$\int_\alpha^X \frac{K\,dx}{(X-x)^n} = \frac{\mp K[\pm(X-\alpha)]^{1-n}}{1-n},$$

d'où il suit que l'intégrale proposée a une valeur finie.

2° Supposons que de $x=\alpha$ à $x=X$ le produit $[\pm(X-x)]^n f(x)$ conserve le même signe, et que sa valeur absolue soit plus grande que la quantité déterminée K, le nombre n étant d'ailleurs égal ou supérieur à 1. La valeur absolue de l'intégrale $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ sera supérieure à celle de l'intégrale $\int_\alpha^x \frac{K\,dx}{[\pm(X-x)]^n}$; or on a, quand n est >1,

$$\int_\alpha^x \frac{K\,dx}{[\pm(X-x)]^n} = \frac{(\pm 1)^n K}{1-n}\left[\frac{1}{(X-x)^{n-1}} - \frac{1}{(X-\alpha)^{n-1}}\right],$$

et, quand $n=1$,

$$\int_\alpha^x \frac{K\,dx}{X-x} = K\log\frac{X-\alpha}{X-x},$$

le second membre de chacune des formules précédentes devient infini pour $x=X$, et, par conséquent, l'intégrale $\int_\alpha^X f(x)\,dx$ est infinie, ainsi que la proposée.

Comme on peut intervertir les limites de l'intégrale,

le précédent théorème s'applique au cas où $f(x)$ devient infinie pour $x = x_0$.

469. Exemples. — 1° Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a ici $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; x étant positif, ce produit est inférieur à 1; on en conclut que l'intégrale a une valeur finie. Nous savions d'avance qu'il en est ainsi, car l'intégrale proposée est la valeur de arc sin$x$ pour $x = 1$, et par conséquent cette intégrale est égale à $\frac{\pi}{2}$.

2° Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k^2 désigne une quantité positive inférieure à 1. On a ici

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}};$$

le second membre de cette formule est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1; donc l'intégrale proposée a une valeur finie.

3° Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2},$$

à laquelle se réduit la précédente lorsqu'on a $k^2 = 1$. On a ici $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, et

$$(1-x) f(x) = \frac{1}{1+x};$$

le second membre de cette formule est supérieur à $\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 ; donc l'intégrale proposée est infinie. Au reste, cette intégrale est la valeur que prend pour $x = 1$ la fonction

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

et l'on voit que la valeur en question est effectivement infinie.

4° Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^n}\,dx,$$

où n désigne un nombre compris entre 0 et 1. On a $f(x) = \frac{\log x}{x^n}$, et cette fonction est infinie pour $x = 0$. En désignant par ε un nombre compris entre 0 et $1-n$,

$$x^{n+\varepsilon} f(x) = x^\varepsilon \log x;$$

or, quand x tend vers zéro, le produit $x^\varepsilon \log x$ tend aussi vers zéro ; on peut donc assigner une quantité α telle, que de $x = 0$ à $x = \alpha$ le produit $x^{n+\varepsilon} f(x)$ soit inférieur à une quantité quelconque donnée K ; d'ailleurs $n+\varepsilon$ est inférieur à 1 ; donc l'intégrale proposée a une valeur finie.

Cas où la fonction contenue sous le signe $\int$ devient infinie entre les limites de l'intégration.

470. Lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur x_1 de x comprise entre x_0 et $X > x_0$, il faut regarder l'intégrale $\int_{x_0}^X f(x)\,dx$ comme la limite vers

laquelle tend la somme

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta}^{X} f(x)\,dx,$$

lorsque ε et η tendent vers la limite zéro. Une telle intégrale peut avoir une valeur finie et déterminée; elle peut aussi être infinie ou indéterminée.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n},$$

où a et α désignent des nombres positifs et où n est un exposant compris entre o et 1, et de la forme $\frac{2\mu+1}{2\nu+1}$, μ et ν étant des entiers; on aura

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim\left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} + \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n}\right);$$

or

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon^{1-n} - \alpha^{1-n}}{1-n}, \quad \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n},$$

donc

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim\left(\frac{a^{1-n} - \alpha^{1-n} + \varepsilon^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n}\right),$$

ε^{1-n} et η^{1-n} s'annulent à la limite; l'intégrale proposée a donc une valeur finie et déterminée, savoir :

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - \alpha^{1-n}}{1-n}.$$

Si le nombre n est de la forme $\frac{2\mu}{2\nu+1}$, μ et ν étant

entiers, et qu'on le suppose plus grand que 1, on aura

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right),$$

$$\int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right);$$

la somme de ces deux intégrales, savoir

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}}\right) - \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^{n-1}}\right),$$

croît au delà de toute limite quand les infiniment petits positifs ε, η tendent vers zéro ; donc alors l'intégrale proposée est infinie.

Considérons encore le cas de $n = 1$; l'intégrale proposée est

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \lim\left[\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x}\right].$$

Or on a, en faisant $x = -t$, $dx = -dt$,

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{a}^{\varepsilon} \frac{dt}{t} = \log\frac{\varepsilon}{a};$$

d'ailleurs

$$\int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x} = \log\frac{a}{\eta};$$

donc

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \log\frac{a\varepsilon}{a\eta} = \log\frac{a}{a} + \log\frac{\varepsilon}{\eta}.$$

La limite du rapport des infiniment petits ε, η est indéterminée ; donc l'intégrale $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x}$ est elle-même indéterminée.

471. Revenons à l'expression générale

$$(1)\qquad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta}^{X} f(x)\,dx;$$

si l'on suppose $\eta = \varepsilon$, elle se réduit à

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx.$$

La limite vers laquelle elle tend quand on fait tendre ε vers zéro a été nommée par Cauchy *valeur principale* de l'intégrale définie $\int f(x)\,dx$. Ainsi la *valeur principale* de l'intégrale $\int_{-\varepsilon}^{+a} \frac{dx}{x}$ que nous venons de considérer est $\log \frac{a}{\varepsilon}$.

Si l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ a une valeur finie et déterminée, il est évident que cette valeur sera la limite vers laquelle tendra la somme

$$(3)\qquad \int_{x_0}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\nu\varepsilon}^{X} f(x)\,dx,$$

quand ε tendra vers zéro, quels que soient les membres positifs μ et ν; donc alors la différence des sommes (2) et (3), savoir

$$(4)\qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx$$

doit tendre vers zéro avec ε, quels que soient μ et ν. Si donc on peut constater qu'il n'en est pas ainsi, on conclura que l'intégrale proposée n'a pas une valeur finie

et déterminée. Les intégrales

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+\nu\varepsilon} f(x)\,dx,$$

où ε désigne un infiniment petit, ont été nommées par Cauchy des intégrales *définies singulières*. On peut retrouver, par la considération de ces intégrales, le résultat établi au n° 466.

En général, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_i$ comprises entre x_0 et X, on devra regarder $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ comme la limite vers laquelle tend la somme

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\eta_1}^{x_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_{x_{i-1}+\eta_{i-1}}^{x_i-\varepsilon_i} f(x)\,dx + \int_{x_i+\eta_i}^{X} f(x)\,dx,$$

quand les quantités ε et η tendent vers zéro. Ce cas se ramène, au reste, au précédent, en décomposant l'intervalle de x_0 à X en plusieurs autres.

Démonstration nouvelle de la formule de Taylor.

472. La considération des intégrales définies fournit une démonstration très-simple et très-élégante de la formule de Taylor.

Soient x et h deux quantités données, t une variable et $f(x+h-t)$ une fonction que nous supposerons continue, ainsi que ses n premières dérivées pour les valeurs de t comprises entre o et h. L'intégration par parties donnera, en représentant par $f'(x+h-t)$, $f''(x+h-t)$, ... les dérivées successives de la fonc-

tion $f(x+h-t)$ prises relativement à la variable $x+h-t$,

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = t f'(x+h-t) + \int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt,$$

$$\int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt = \frac{t^2}{2} f''(x+h-t) + \int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2}\,dt,$$

$$\int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{t^3}{2.3} f'''(x+h-t) + \int_0^t f^{\text{IV}}(x+h-t)\frac{t^3}{2.3}\,dt,$$

. . . . ,

$$\int_0^t f^{(n-1)}(x+h-t)\frac{t^{n-2}}{2.3\ldots(n-2)}\,dt$$

$$= \frac{t^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x+h-t) + \int_0^t f^{(n)}(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}\,dt.$$

Ajoutons toutes ces inégalités, faisons ensuite $t=h$, et remarquons que l'on a

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = f(x+h) - f(x),$$

il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{h}{1} f'(x) + \dfrac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n, \end{cases}$$

en posant

$$(2)\qquad R_n = \int_0^h f^{(n)}(x+h-t)\frac{t^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}\,dt.$$

La formule (1) conduit à celle de Taylor quand les conditions relatives à la continuité sont remplies et que le reste R_n tend vers zéro à mesure que n augmente. La

formule (2) donne une expression de R_n qui est souvent utile, et l'on peut en déduire celle que nous avons établie au n° 106. Effectivement, on tire de la formule (2) (n° 463)

$$R_n = U \int_0^h \frac{t^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} dt = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} U,$$

U étant une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $f^n(x+h-t)$ quand t varie de o à h. La dérivée dont il s'agit étant continue, elle prendra la valeur U pour une valeur $(1-\theta)h$ de t, comprise entre o et h; on a donc

$$R_n = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(n+\theta h).$$

De l'intégration par séries.

473. Théorème I. — *Soit $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ une série dont les termes sont des fonctions continues d'une variable x. Supposons la série convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X, appelons $f(x)$ la somme de la série et r_n la valeur du reste en s'arrêtant au $n^{ième}$ terme; supposons en outre que l'on puisse trouver un nombre tel, que pour toute valeur de n supérieure à ce nombre le reste r_n soit moindre qu'un nombre quelconque ε donné à l'avance, la série*

$$\int_{x_0}^x u_0 dx + \int_{x_0}^x u_1 dx + \int_{x_0}^x u_2 dx + \ldots$$

sera aussi convergente pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X; en outre, elle aura pour somme l'intégrale $\int_{x_0}^x f(x) dx$.

En effet, x étant comprise entre x_0 et X, posons

(1) $$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + r_n;$$

on aura

(2) $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x} r_n\,dx;$$

or on a (nº 463)

$$\int_{x_0}^{x} r_n\,dx = \rho_n \int_{x_0}^{x} dx = \rho_n (x - x_0),$$

ρ_n étant une quantité comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend r_n quand x varie de x_0 à X; d'ailleurs r_n s'annule par hypothèse pour $n = \infty$: donc la même chose a lieu à l'égard de ρ_n, et l'on a conséquemment

$$\lim \int_{x_0}^{x} r_n\,dx = 0 \text{ pour } n = \infty;$$

donc

(3) $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \ldots,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

474. Théorème II. — *Soit* $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ *une série dont les termes sont des fonctions d'une variable* x, *continues de* $x = x_0$ *à* $x = \mathrm{X}$, *et qui converge vers une limite déterminée* $f(x)$. *Si la série*

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots$$

remplit les conditions du théorème I, elle a pour somme $f'(x)$.

En effet, la série $\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots$ étant supposée convergente, désignons par $F(x)$ la somme vers laquelle elle converge; on aura

$$F(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots,$$

d'où, par le théorème précédent,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{du_0}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x} \frac{du_1}{dx}\,dx + \ldots,$$

ou, en désignant par $u_n^{(0)}$ la valeur de u_n, pour $x = x_0$,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = (u_0 - u_0^{(0)}) + (u_1 - u_1^{(0)}) + \ldots.$$

Or la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ converge vers la limite $f(x)$; on a donc

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = f(x) + \text{const.},$$

et, en différentiant,

$$F(x) = f'(x),$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

475. Le théorème I donne le moyen d'exprimer par des séries les intégrales des différentielles.

Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ soit développable en série convergente, par la formule de Maclaurin, pour les valeurs de x comprises entre o et X; on aura

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette formule par dx et qu'on l'intègre ensuite entre les limites o et x, on aura, par le précédent théorème,

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{1} f(0) + \frac{x^2}{1.2} f'(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f''(0) + \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que la formule de Maclaurin elle-même appliquée à la fonction $\int_0^x f(x)\,dx$.

Généralement, si une fonction $f(x)$ n'est définie que par son développement en série, de manière que l'on ait

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

non-seulement on aura (n° 473)

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots,$$

mais, en outre, $\int_0^x f(x)\,dx$ sera, en même temps que $f(x)$, fonction continue de x. Cela résulte de la proposition suivante :

Si une série, ordonnée par rapport aux puissances entières et ascendantes d'une variable réelle ou imaginaire z, est convergente pour toutes les valeurs de z dont le module n'est pas supérieur à R, *elle a pour somme une fonction de z qui est continue pour les mêmes valeurs de z.*

En effet, désignons par $f(z)$ la somme de la série convergente

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

par $\varphi_n(z)$ la somme des n premiers termes et par $\psi_n(z)$

le reste. On peut assigner une valeur de n telle, que pour cette valeur et pour les valeurs plus grandes le module de $\psi_n(z)$ reste inférieur à une quantité donnée k. Il suffit pour cela de prendre n tel que

$$\alpha_n R'^n + \alpha_{n+1} R'^{n+1} + \ldots < k,$$

α_n étant le module de a_n et R′ une valeur quelconque inférieure à R; cette condition peut être remplie, car la série proposée étant convergente quand mod. $z = \mathrm{R}$, les modules de ses termes forment une série convergente quand on a mod. $z < \mathrm{R}$.

Pour tout module $\rho < \mathrm{R}'$, on aura, à plus forte raison,

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n+1} \rho^{n+1} + \ldots < k,$$

et, comme le module de $\psi_n(z)$ est plus petit que cette somme, il sera moindre que k.

Cela posé, soient z et $z + h$ deux valeurs de la variable ayant des modules compris entre zéro et R′. On a

$$f(z+h) - f(z) = [\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)] + [\psi_n(z+h) - \psi_n(z)];$$

le polynôme $\varphi_n(z)$ étant une fonction continue de z, on peut supposer le module de h assez petit pour que le module de $\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)$ soit inférieur à k. D'ailleurs les modules de $\psi_n(z+h)$, $\psi_n(z)$ sont eux-mêmes inférieurs à k; par conséquent, le module de

$$f(z+h) - f(z)$$

sera inférieur à $3k$; ce module est donc infiniment petit en même temps que le module de h; en d'autres termes, la fonction $f(z)$ est continue.

Ce théorème, dont nous empruntons la démonstration à MM. Briot et Bouquet, nous servira plus loin pour

établir, d'après ces géomètres, une importante propriété.

476. Exemples. — 1° On a, par la division,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

et la série du second membre est convergente pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$; en multipliant par dx et intégrant à partir de $x = 0$, on aura

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Cette formule subsiste même pour $x = \pm 1$ (n° 121), car la série du second membre reste convergente; on a ainsi

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

2° On a par la formule du binôme, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots;$$

multipliant par dx et intégrant ensuite à partir de $x = 0$, il vient

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

formule qui subsiste pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et même pour $x = \pm 1$. En y faisant $x = 1$, on a

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots.$$

477. Il arrive souvent qu'une fonction $f(x)$ est développable de plusieurs manières en série convergente; on doit alors choisir le développement le mieux approprié à la question que l'on traite. Considérons, par exemple, l'intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

où les radicaux sont pris positivement, et où k désigne un nombre inférieur à l'unité. On a, par la formule du binôme,

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6x^6 + \ldots;$$

multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et intégrant ensuite à partir de $x=0$, il viendra

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots.$$

On a de même, pour l'intégrale elliptique de deuxième espèce,

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^x \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots.$$

Chacune des intégrales qui figurent dans les formules précédentes peut être déterminée par la méthode du

n° 445. Les séries contenues dans ces formules sont très-convergentes quand k est une petite fraction; mais, lorsque k diffère peu de l'unité, il est nécessaire d'employer d'autres développements.

Différentiation des intégrales.

478. Une intégrale définie

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

dans laquelle les limites x_0 et X sont regardées comme variables, est une fonction de ces limites. Il est évident qu'on peut écrire

$$u = \int_{x_0}^{X} f(X)\, dX, \quad \text{ou} \quad u = -\int_{X}^{x_0} f(x_0)\, dx_0,$$

car la notation par laquelle on désigne la variable sous le signe $\int$ est indifférente. On voit alors que les différentielles partielles de u relatives à X et x_0 sont respectivement

$$f(X)\, dX, \quad -f(x_0)\, dx_0.$$

Si donc on considère u comme fonction des seules variables X et x_0, on aura

$$(1) \qquad du = f(X)\, dX - f(x_0)\, dx_0,$$

et cette formule s'applique au cas où X et x_0 sont deux variables indépendantes et à celui où X et x_0 sont des fonctions d'une ou de plusieurs autres variables.

Si la fonction $f(x)$ renferme des quantités α, β, ..., regardées comme variables, il faudra ajouter au second membre de la formule (1) les différentielles partielles

relatives à ces variables, et l'on aura

$$(2)\quad du = f(X)\,dX - f(x_0)\,dx_0 + \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots;$$

il nous reste à indiquer la manière d'obtenir chacune des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$, ..., qui doivent être prises comme si x_0 et X étaient indépendantes des variables α, β, ...

Différentiation sous le signe $\int$.

479. Considérons l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

et supposons que la fonction $f(x)$ renferme une quantité α regardée comme variable. Nous nous proposons de chercher la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, et, d'après ce qui précède, on doit supposer les limites x_0 et X indépendantes de α.

Pour mettre en évidence la variable α, représentons par $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ la fonction $f(x)$ et sa dérivée $\frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}$. Donnons à α l'accroissement $\Delta\alpha$ et désignons par Δu l'accroissement correspondant de u; on aura

$$\Delta u = \int_{x_0}^{X} F(\alpha + \Delta\alpha)\,dx - \int_{x_0}^{X} F(\alpha)\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{X} [F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha)]\,dx.$$

Or, si la fonction $f(x)$ ou $F(\alpha)$ reste continue entre les limites de l'intégration, on a (n° **14**)

$$F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha) = \Delta\alpha\, F'(\alpha + \theta\,\Delta\alpha),$$

θ étant une quantité comprise entre o et 1; on a, par conséquent, dans cette hypothèse,

$$\frac{\Delta u}{\Delta \alpha} = \int_{x_0}^{X} F'(\alpha + \theta \Delta\alpha)\, dx,$$

et, en passant à la limite, il vient, pour $\Delta\alpha = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} F'(\alpha)\, dx$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}\, dx.$$

Si donc la fonction $f(x)$ reste finie entre les limites de l'intégration, on obtiendra la différentielle $\frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha$ en exécutant la différentiation relative à α sous le signe $\int$. Mais il faut bien remarquer que cette règle peut être en défaut si, contrairement à notre hypothèse, la fonction $f(x)$ devient infinie entre les limites x_0 et X.

480. Il peut arriver que l'on ait besoin de différentier une intégrale indéfinie par rapport à une variable différente de celle à laquelle se rapporte l'intégration; ce cas se ramène immédiatement au précédent. Soit, en effet, l'intégrale indéfinie $\int f(x)\, dx$; on peut écrire

$$\int f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C;$$

soit α l'une des variables dont dépend $f(x)$, on aura

$$\frac{\partial \int f(x)\, dx}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}\, dx + \frac{\partial C}{\partial \alpha};$$

mais, C étant une constante arbitraire relativement à x il en est de même de $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$; on a donc

$$\frac{\partial \int f(x)\,dx}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}\,dx.$$

Intégration sous le signe $\int$.

481. Considérons l'intégrale définie

$$u = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx,$$

où $f(x, \alpha)$ désigne une fonction des variables x et α, et dans laquelle les limites x_0, X sont indépendantes de α. La quantité u dépend de x_0, de X et de α; mais nous la regarderons spécialement comme fonction de α. Posons d'abord

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\,d\alpha = F(x, \alpha),$$

la limite inférieure α_0 étant une quantité déterminée quelconque, puis

$$v = \int_{x_0}^{X} F(x, \alpha)\,dx.$$

D'après ce qu'on a vu au numéro précédent, si la fonction $F(x, \alpha)$ reste continue entre les limites de l'intégration, on aura

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$$

ou

$$u = \frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

et, puisque v s'annule pour $\alpha = \alpha_0$, on aura

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} u\,d\alpha = v,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int_{x_0}^{X}\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx.$$

Cette formule exprime la proposition suivante :

Pour intégrer entre les limites α_0, α le produit de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x,\alpha)\,dx$ par $d\alpha$, il suffit de multiplier sous le signe $\int$ par $d\alpha$ et d'intégrer ensuite le produit entre les limites α_0, α.

Mais, nous devons le répéter, cela suppose que la fonction $\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\,d\alpha$ reste continue entre les limites x_0, X de x.

On peut encore exprimer la même proposition en disant que

Si l'on propose d'intégrer la différentielle

$$f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$$

entre les limites respectives x_0, X et α_0, α, on peut effectuer les intégrations dans un ordre quelconque, pourvu que les limites de chaque variable α et x soient indépendantes de l'autre variable.

On verra plus loin l'interprétation géométrique du résultat que nous venons d'obtenir.

De l'intégration des différentielles qui dépendent de plusieurs variables indépendantes.

482. L'intégration des différentielles qui dépendent de plusieurs variables se ramène facilement, comme on va le voir, à l'intégration des différentielles d'une seule variable, en faisant usage du théorème du n° 479.

Toute fonction de plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots, u, v$ a une différentielle de la forme

$$(1) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots + U\,du + V\,dv,$$

X, Y, ..., U, V étant des fonctions des variables $x, y, z, \ldots, u, v$. Mais la réciproque n'a pas lieu, et, pour que l'expression précédente soit la différentielle d'une fonction des variables $x, y, z, \ldots, u, v$, ou, comme on dit aussi, soit une *différentielle exacte,* il est nécessaire que certaines conditions soient remplies. En effet, si l'expression (1) est la différentielle d'une fonction Ω, on aura

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = Z, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial v} = V;$$

considérons deux quelconques de ces équations, par exemple

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = Y;$$

en différentiant la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, on aura

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

On conclut de là que, si l'expression (1) est une différentielle exacte, on a nécessairement

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}, & \dfrac{\partial X}{\partial z}=\dfrac{\partial Z}{\partial x}, & \ldots, & \dfrac{\partial X}{\partial v}=\dfrac{\partial V}{\partial x},\\ & \dfrac{\partial Y}{\partial z}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}, & \ldots, & \dfrac{\partial Y}{\partial v}=\dfrac{\partial V}{\partial y},\\ & & & \ldots\ldots,\\ & & & \dfrac{\partial U}{\partial v}=\dfrac{\partial V}{\partial u}. \end{array}\right.$$

Le nombre des conditions (2) est égal au nombre des combinaisons des variables $x, y, z, \ldots$ deux à deux; lorsqu'il n'y a que deux variables indépendantes x et y, l'expression (1) est

$$X\,dx + Y\,dy,$$

et les conditions (2) se réduisent à une seule

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

483. Nous allons démontrer que, réciproquement, lorsque les conditions (2) sont remplies, il existe une fonction Ω des variables indépendantes $x, y, z, \ldots, u, v$, telle que

$$(3)\quad d\Omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots + U\,du + V\,dv.$$

L'expression générale de toutes les fonctions Ω qui admettent X pour dérivée partielle par rapport à x est

$$\Omega = \int_{x_0}^{x} X\,dx + \Omega_1,$$

Ω_1 désignant une fonction quelconque des variables $y, z, \ldots, u, v$, mais ne renfermant pas x.

Il faut déterminer Ω_1 de façon que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \mathrm{Y}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = \mathrm{Z}, \ \ldots, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial u} = \mathrm{U}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial v} = \mathrm{V}.$$

Or on a, d'après le théorème du n° 479,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\Omega_1}{\partial y},$$

et, en substituant à $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}$ la fonction identique $\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}$,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Omega_1}{\partial y} = \mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1 + \frac{\partial\Omega_1}{\partial y},$$

Y_1 désignant la fonction Y dans laquelle on a remplacé x par x_0. Ainsi, pour que $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ se réduise à Y, il faut et il suffit que l'on ait $\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} = \mathrm{Y}_1$. La fonction Ω, définie par la formule (4), vérifiera, dans l'équation (3), si la fonction Ω_1, qui ne dépend que des variables $y, z, \ldots, u, v$, vérifie elle-même l'équation

$$(5) \qquad d\Omega_1 = \mathrm{Y}_1 dy + \mathrm{Z}_1 dz + \ldots + \mathrm{U}_1 du + \mathrm{V}_1 dv,$$

$\mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1$ désignant les valeurs que prennent $\mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots, \mathrm{U}, \mathrm{V}$ pour $x = x_0$.

Opérant sur la formule (5) comme nous avons fait à l'égard de la formule (1), on trouve

$$\Omega_1 = \int_{y_0}^{y} \mathrm{Y}_1\,dy + \Omega_2,$$

avec

$$d\Omega_2 = \mathrm{Z}_2 dz + \ldots + \mathrm{U}_2 du + \mathrm{V}_2 dv,$$

$\mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2$ étant les valeurs que prennent $\mathrm{Z}, \ldots, \mathrm{U}, \mathrm{V}$ quand on fait $x = x_0$, $y = y_0$.

Il est évident qu'en continuant ainsi on obtiendra

l'expression suivante de la fonction demandée Ω :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega = \int_{x_0}^{x} \mathrm{X}\,dx + \int_{y_0}^{y} \mathrm{Y}_1\,dy + \int_{z_0}^{z} \mathrm{Z}_2\,dz + \ldots \\ + \int_{u_0}^{u} \mathrm{U}_{n-2}\,du + \int_{v_0}^{v} \mathrm{V}_{n-1}\,dv + \mathrm{C}, \end{aligned}\right.$$

en désignant par n le nombre des variables et en convenant que chaque indice i dont les lettres Y, Z, ..., U, V sont affectées indique qu'il faut remplacer les i premières des variables $x, y, z, \ldots, u, v$ par les valeurs correspondantes $x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0$. La lettre C représente une quantité quelconque indépendante des variables $x, y, z, \ldots, u, v$.

Considérons, par exemple, le cas de deux variables x et y, et soit

$$(6)\qquad \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

la différentielle donnée. L'intégrale, prise de manière qu'elle s'annule pour $x = x_0$, $y = y_0$, aura pour valeur

$$(7)\qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy.$$

484. La recherche de l'intégrale d'une différentielle qui renferme n variables indépendantes se ramène, comme on voit, à un nombre n d'intégrations qui se rapportent respectivement aux n variables; il est évident que ces intégrations peuvent être effectuées dans un ordre quelconque, et cette remarque n'est pas sans importance. Ainsi, l'intégrale de la différentielle (6) est représentée par l'expression (7), mais elle peut l'être aussi par l'expression

$$(8)\qquad \int_{y_0}^{y} \psi(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\,dx,$$

qui s'annule comme la première pour $x = x_0$, $y = y_0$. En égalant ces deux expressions entre elles, on a

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\,dx = \int_{y_0}^{y} \psi(x, y)\,dy - \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy,$$

ou

$$(9)\quad \int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{y} [\psi(x, y) - \psi(x_0, y)]\,dy,$$

formule qui a lieu pour deux fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ assujetties à la seule condition

$$(10)\qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}.$$

Intégration des différentielles dans le cas des variables imaginaires.

485. Pour compléter la théorie de l'intégration des différentielles, il nous reste à examiner le cas des variables imaginaires. Soient $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire et

$$f(z) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y)$$

une fonction donnée de cette variable, $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions réelles des variables réelles x, y. Si la fonction $f(z)$ a une dérivée déterminée, on a (n° 377)

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x},$$

ce qui montre que les expressions

$$\varphi(x, y)\,dx - \psi(x, y)\,dy \quad \text{et} \quad \psi(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

sont des différentielles exactes. Si l'on fait la somme de

ces expressions, après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, on trouve pour résultat

$$[\varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\psi(x, y)](dx + dy\sqrt{-1}) = f(z)\,dz,$$

d'où il suit que $f(z)dz$ est la différentielle d'une fonction des variables x et y. On a donc cette proposition :

Théorème. — *La différentielle $f(z)dz$ admet une intégrale lorsque z est imaginaire comme lorsque z est réel.*

Les conditions pour que l'expression

$$X dx + Y dy + Z dz + \ldots + U du + V dv$$

soit une différentielle exacte, dans le cas où $x, y, z, \ldots$ désignent des variables imaginaires, sont évidemment les mêmes que dans le cas des variables réelles, et la règle que nous avons exposée au n° 483 est applicable à tous les cas.

486. Exemple I. — Supposons que l'on demande l'intégrale de la différentielle

$$d\Omega = \frac{x}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}\,dy.$$

On a ici

$$X = \frac{x}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{(x-y)^2},$$

$$Y = -\frac{x^2}{y(x-y)^2} = -\frac{1}{y} - \frac{x}{(x-y)^2} + \frac{1}{x-y},$$

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = \log(x-y) - \frac{y}{x-y} - \log(x_0-y) + \frac{y}{x_0-y},$$

$$\int_{y_0}^{y} Y_1\,dy = -\log y + \frac{x_0}{(x_0-y)^2} + \log(x_0-y)$$
$$+ \log y_0 - \frac{x_0}{(x_0-y_0)^2} - \log(x_0-y_0),$$

d'où

$$\Omega = \log \frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} - \log \frac{x_0-y_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0-y_0} + C,$$

ou, simplement,

$$\Omega = \log \frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} + C,$$

C désignant une constante quelconque.

487. Exemple II. — Supposons, en second lieu, que l'on demande l'intégrale de la différentielle

$$d\Omega = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz.$$

On a ici

$$X = y+z, \quad Y_1 = z+x_0, \quad Z_2 = x_0+y_0,$$

$$\int_{x_0}^{x} X\,dx = (y+z)x - (y+z)x_0,$$

$$\int_{y_0}^{y} Y_1\,dy = (z+x_0)y - (z+x_0)y_0,$$

$$\int_{z_0}^{z} Z_2\,dy = (x_0+y_0)z - (x_0+y_0)z_0;$$

d'où

$$\Omega = yz + zx + xy - y_0z_0 - z_0x_0 - x_0y_0 + C,$$

ou, plus simplement,

$$\Omega = yz + zx + xy + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Détermination des valeurs de quelques intégrales définies.

488. Il existe un grand nombre d'intégrales définies qui se rencontrent fréquemment dans les applications de l'Analyse, et dont les valeurs peuvent être déterminées sans recourir à l'emploi des séries. Nous allons faire connaître ici les divers procédés que l'on peut employer dans les recherches de cette nature.

Remarquons d'abord que l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

s'obtiendra immédiatement toutes les fois que l'on saura exprimer l'intégrale indéfinie de la différentielle $f(x)\,dx$, par le moyen des fonctions *connues*, puisque, en désignant par $F(x) +$ const. cette intégrale, on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Il convient de présenter quelques exemples de ce premier procédé.

1° On a

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},\qquad \int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + \text{const.},\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + \text{const.},$$

et l'on en conclut, en supposant $a > 0$,

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}, & \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, & \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2° On a (n° 450)

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -e^{-ax}\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2} + \text{const.},$$

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -e^{-ax}\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2} + \text{const.},$$

et l'on en conclut, en supposant $a > 0$,

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

3° Nous avons fait connaître au n° 456 la valeur de l'intégrale $\int \sin^m x\,dx$ pour le cas où m est un entier positif, pair ou impair. Si l'on prend cette intégrale entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aura les formules suivantes :

$$(4)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$(5)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

Il faut remarquer que ces intégrales se changent en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx,$$

respectivement, quand on change x en $\frac{\pi}{2} - x$, et qu'elles deviennent

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

quand on change $\sin x$ en x, dx en $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4° Nous avons trouvé (n° 454)

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Supposons m et n entiers positifs et $n > 1$; en prenant les intégrales entre les limites zéro et $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Remplaçons successivement n par $2n$ et par $2n+1$, la lettre n désignant toujours un entier ; on aura, par la formule précédente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 . 3 \ldots (2n-1)}{(m+2)(m+4)\ldots(m+2n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 . 4 \ldots 2n}{(m+3)(m+5)\ldots(m+2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x \, dx;$$

l'intégrale de la différentielle $\sin^m x \cos x \, dx$ est

$$\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \text{const.};$$

on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x \, dx = \frac{1}{m+1},$$

et, par conséquent, la seconde des intégrales précédentes a pour valeur

$$(6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 . 4 \ldots 2n}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n+1)}.$$

Quant à l'autre intégrale, si l'on écrit $2m$ au lieu de m, on aura, par la formule (4),

$$(7)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1.3\ldots(2m-1)\times 1.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2m+2n)}\frac{\pi}{2};$$

il faut remarquer que l'intégrale de la formule (6) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^m x\, dx$$

par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$.

489. L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}$, où p est un nombre positif inférieur à 1, a une valeur finie; cette intégrale, étudiée par Euler, joue un rôle important dans la théorie des intégrales définies; elle peut être obtenue, comme on va le voir, par la simple considération des différentielles rationnelles.

Désignons par m et n deux entiers positifs tels que $m < n$ et décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{n z^{2m}}{1+z^{2n}}.$$

Si l'on pose

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

les racines de l'équation $1 + z^{2n} = 0$ seront représentées par la formule $e^{\pm\varphi_k\sqrt{-1}}$, où l'on devra donner à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, et la somme T_k des deux fractions simples qui répondent aux racines conjuguées $e^{+\varphi_k\sqrt{-1}}$,

$e^{-\varphi_k\sqrt{-1}}$ sera

$$T_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z - e^{\varphi_k\sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(2m+1)\varphi_k\sqrt{-1}}}{z - e^{-\varphi_k\sqrt{-1}}}\right]$$

$$= \frac{-(z-\cos\varphi_k)\cos(2m+1)\varphi_k + \sin\varphi_k \sin(2m+1)\varphi_k}{(z-\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}.$$

Si l'on intègre la différentielle $T_k dz$ entre les limites $z = -Z$ et $z = +Z$, il viendra

$$\int_{-Z}^{+Z} T_k dz = -\frac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi_k \log\frac{(Z-\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}{(Z+\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k}$$

$$+ \sin(2m+1)\varphi_k\left[\operatorname{arctang}\frac{Z-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k} + \operatorname{arctang}\frac{Z+\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right];$$

faisons tendre Z vers l'infini, le logarithme de la formule précédente s'annulera à la limite, et les deux arcs de cercle se réduiront chacun à $\frac{\pi}{2}$, parce que φ_k est $< \pi$. On a donc

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin(2m+1)\varphi_k,$$

et, si l'on fait

$$\alpha = \frac{2m+1}{2n}\pi,$$

on aura

$$(2m+1)\varphi_k = (2k+1)\alpha, \quad \lim \int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin(2k+1)\alpha.$$

Maintenant on a

$$\frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}} = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1};$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}\, dz}{1 + z^{2n}} = \pi[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha].$$

Si l'on multiplie par $2\sin\alpha$ la somme entre crochets qui est contenue dans cette formule, on obtient un produit égal à

$$(1-\cos 2\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\ldots+[\cos(2n-2)\alpha-\cos 2n\alpha],$$

c'est-à-dire égal à

$$1-\cos 2n\alpha = 2,$$

à cause de $2n\alpha=(2m+1)\pi$. Ainsi l'on a, en remettant pour α sa valeur,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz=\frac{\pi}{\sin\left(\dfrac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

L'intégrale dont nous venons de trouver la valeur est la somme des deux suivantes :

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{nz^{2m}\,dz}{1+z^{2n}},\quad \int_{0}^{\infty}\frac{nz^{2m}\,dz}{1+z^{2n}},$$

et celles-ci sontégales entre elles, car leurs éléments sont égaux chacun à chacun. On peut donc, dans notre formule, faire commencer l'intégration à zéro, pourvu qu'on double l'intégrale. Ainsi l'on a

$$\int_{0}^{\infty}\frac{2nz^{2m}\,dz}{1+z^{2n}}=\frac{\pi}{\sin\left(\dfrac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

La variable z restant maintenant positive, faisons la substitution

$$z=x^{\frac{1}{2n}},\quad 2n\,dz=x^{\frac{1}{2n}-1}\,dx,$$

et posons

$$\frac{2m+1}{2n}=p;$$

la formule précédente deviendra

$$(8)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

ce qui est le résultat que nous voulions obtenir.

La formule (8) a été établie dans l'hypothèse où le nombre p, compris entre zéro et 1, a la forme $\frac{2m+1}{2n}$, m et n étant entiers. Mais les deux membres de cette formule sont évidemment des fonctions continues de p, et il s'ensuit que celle-ci a lieu pour toutes les valeurs de p comprises entre zéro et 1, car on peut toujours former une suite indéfinie de fractions rationnelles ayant la forme $\frac{2m+1}{2n}$ et qui tendent vers une limite égale à p.

490. On peut suivre une marche analogue pour déterminer l'intégrale

$$u = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx,$$

où p désigne encore un nombre compris entre zéro et 1. Si l'on change x en $\frac{1}{x}$, dx en $-\frac{dx}{x^2}$, les limites de l'intégrale deviendront ∞ et 1; mais on peut permuter ces limites en changeant le signe de l'intégrale, ce qui donnera

$$u = \int_1^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx;$$

donc, en ajoutant cette formule à la précédente, on aura

$$2u = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx,$$

ou

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx.$$

Supposons que p soit un nombre rationnel de la forme

$$p = \frac{2m+1}{2n},$$

m et n étant des entiers. Si l'on emploie la substitution

$$x = z^{2n}, \quad dx = 2n z^{2n-1} dz,$$

il viendra

$$u = \int_0^{\infty} n \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}} dz;$$

la quantité qui multiplie dz sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle dont les deux termes sont de degré pair, car $2np$ est, par hypothèse, un nombre entier impair. Il s'ensuit qu'on peut faire commencer l'intégrale à $-\infty$, pourvu qu'on ne prenne que la moitié du résultat; ainsi l'on aura

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1 - z^{2n}} dz.$$

Les valeurs de z qui rendent infinie la fonction rationnelle qui multiplie dz sont

$$e^{\pm \frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}} = \cos\frac{k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

le nombre k ayant les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. Si l'on nomme T_k la somme des deux fractions rationnelles qui répondent aux racines conjuguées représentées par l'équation précédente, on trouvera

$$T_k = \sin kp\pi \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}},$$

et il en résulte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k\,dz = \sin kp\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{n}\,dz}{\left(z - \cos\frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{k\pi}{n}};$$

si l'on pose $z - \cos\frac{k\pi}{n} = t\sin\frac{k\pi}{n}$, l'intégrale du second membre de cette formule deviendra $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$, et, par suite, elle est égale à $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ ou à π. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k\,dz = \pi\sin kp\pi = \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos(2k-1)p\pi - \cos(2k+1)p\pi}{\sin p\pi}.$$

Donnons maintenant à k les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$; ajoutons les résultats, et remarquons que

$$\cos(2n-1)p\pi = -\cos p\pi,$$

parce que $2np$ est un nombre entier impair; on aura

$$u = \pi\cot p\pi,$$

ou

$$(9)\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi\cot p\pi,$$

formule qui subsiste pour toutes les valeurs de p comprises entre 0 et 1.

Sur quelques conséquences des formules précédentes.

491. Le résultat que nous venons d'obtenir conduit facilement à la formule qui exprime le développement des tangentes en une série de fractions simples.

Effectivement, si l'on réduit la fonction $\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$

en série, par la division algébrique, on aura

$$\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1 - x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (x^{m+p-1} - x^{m-p});$$

multipliant par dx et intégrant ensuite de o à 1, il vient

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1 - x} dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{m+p} - \frac{1}{m+1-p}\right);$$

on a donc, par la formule (9) du numéro précédent,

$$\pi \cot p\pi = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p}\right) - \left(\frac{1}{1-2p} - \frac{1}{1+2p}\right) - \ldots,$$

et, en posant successivement $p\pi = x$ et $= \frac{\pi}{2} - x$,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) - \ldots,$$

$$\operatorname{tang} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x}\right) + \ldots.$$

p étant compris entre o et 1, notre analyse suppose que, dans les formules précédentes, x soit compris entre o et π ou entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; mais, comme les deux membres de chaque formule admettent évidemment la période π, celles-ci ont lieu, quel que soit x.

A cause de

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x,$$

les formules précédentes donnent

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \ldots.$$

et, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$\operatorname{séc} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x}\right) + \dots.$$

Il faut remarquer que ces dernières formules résultent aussi de la formule (8) du n° 489, car celle-ci peut être facilement mise sous la forme

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1 + x}\, dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

492. Formule de Wallis. — Nous avons fait connaître, au n° 488, la valeur de l'intégrale définie

$$u_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx,$$

pour le cas où m est un entier positif pair ou impair. Il est évident que cette intégrale diminue quand m augmente, car les éléments $\sin^m x\, dx$ sont d'autant plus grands que m est plus petit; on a donc, en désignant par n un entier positif,

$$u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1},$$

c'est-à-dire (n° 488)

$$\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2} < \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)},$$

ou

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Le rapport des seconds membres des inégalités précé-

dentes est égal à $\frac{2n}{2n+1}$, et il a pour limite l'unité quand n tend vers l'infini; donc on a

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1} \quad (\text{pour } n=\infty).$$

Cette formule remarquable est celle de Wallis; nous aurons plus loin l'occasion d'en faire usage.

Application de la différentiation et de l'intégration, sous le signe $\int$, à la détermination de certaines intégrales définies.

493. Lorsqu'une intégrale définie dont la valeur est connue dépend d'un ou de plusieurs paramètres, on peut en déduire de nouvelles intégrales par le moyen de la différentiation ou de l'intégration relative aux paramètres. Nous allons présenter quelques exemples.

1° On a (n° 488), en supposant $\alpha > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}},$$

et, en différentiant n fois par rapport à α, il vient

$$\int_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n.dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n\alpha^{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2\alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2° On a (n° 488), en supposant α positif,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha},$$

et, en différentiant $n-1$ fois par rapport à α, il vient

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{n-1}\,dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\alpha^n}.$$

Si l'on suppose $\alpha = 1$, dans cette formule, on aura

$$(3)\qquad \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx = 1.2.3\ldots(n-1).$$

494. Reprenons la formule

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha},$$

que nous venons de considérer; multiplions-la par $d\alpha$ et intégrons ensuite de $\alpha = b$ à $\alpha = a$; comme on a

$$\int_b^a e^{-\alpha x}\,d\alpha = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x},$$

il viendra

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{a}{b},$$

et, en faisant $b = 1$,

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\,dx = \log a.$$

Nous avons trouvé (n° 488), en supposant $a > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Multiplions ces deux formules par da et intégrons en-

suite de $a = f$ à $a = g$; il viendra

(6) $$\int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \cos bx\,dx = \frac{1}{2} \log \frac{g^2 + b^2}{f^2 + b^2},$$

(7) $$\int_0^\infty \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \sin bx\,dx = \text{arc tang} \frac{g}{b} - \text{arc tang} \frac{f}{b},$$

f et g étant des quantités positives quelconques.

Supposons que b soit positif dans la formule (7) : alors, si l'on fait $f = 0$, $g = \infty$, le second membre de cette formule se réduira à $\frac{\pi}{2}$, et l'on aura

(8) $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2};$$

il est évident que, si b est négatif, la valeur de l'intégrale sera $-\frac{\pi}{2}$.

495. La formule précédente a une très-grande importance en raison du parti que les géomètres ont su en tirer dans des recherches difficiles. Si l'on y remplace b par $a + b$, puis par $a - b$, en supposant a et b positifs et $a > b$, il viendra

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En ajoutant ces deux formules et en les retranchant ensuite l'une de l'autre, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x} dx = 0.$$

Or ces deux intégrales se déduisent l'une de l'autre par la permutation des lettres a et b; on a donc

(9) $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = 1 \quad \text{ou} \quad = 0,$$

selon que l'on a $a > b$ ou $a < b$; les quantités a et b sont d'ailleurs supposées positives. Si l'on a $b = a$, le premier membre de la formule (9) se réduit à $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}\,dx$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}$, d'après la formule (8).

Nous avons ainsi un exemple d'une fonction de deux variables a et b, essentiellement discontinue, la valeur de cette fonction étant toujours égale à 1 ou à zéro quand a et b sont positifs; nous allons présenter une application de la formule (9) qui se rapporte à la détermination d'une nouvelle intégrale définie.

496. Reprenons la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

en la multipliant par $\frac{\cos b}{b}\,db$, elle devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\cos b\,db}{b}\,e^{-ax}\,dx = \frac{\cos b\,db}{a^2 + b^2};$$

intégrons maintenant relativement à b, depuis $b = 0$ jusqu'à $b = +\infty$; on pourra, dans le premier membre, exécuter l'intégration sous le signe $\int$, et, comme le facteur $e^{-ax}\,dx$ est constant dans l'intégration relative à b, on aura pour résultat

$$\int_0^\infty \left(e^{-ax}\int_0^\infty \frac{\sin bx\cos b\,db}{b}\right)dx = \int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2 + b^2}.$$

L'intégrale relative à x, dans le premier membre de cette formule, peut être décomposée en deux parties: l'une obtenue en intégrant de $x = 0$ à $x = 1$, l'autre en intégrant

de $x = 1$ à $x = \infty$. Mais, quand x est < 1, le facteur

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b}\, db$$

est nul, d'après la formule (9) (nº 495), et le même facteur est toujours égal à $\frac{\pi}{2}$ quand x est > 1. La formule précédente se réduit donc à

$$\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ax}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2},$$

et, à cause de $\int_1^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{-a}$, on a

$$\int_0^\infty \frac{a\cos b\,db}{a^2+b^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

La constante a est essentiellement positive; si donc on fait $b = ax$, $db = a\,dx$, il viendra

$$(10)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

ce qui est la formule que nous nous étions proposé d'établir.

497. Nous considérerons encore l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ qui fait partie de la classe de celles dont nous développerons la théorie dans le Chapitre suivant, et dont la valeur peut s'obtenir facilement en appliquant convenablement la règle de l'intégration sous le signe $\int$. Posons

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

on aura évidemment

$$A = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Si l'on fait

$$x = \alpha t, \quad dx = \alpha dt,$$

α étant une constante, il viendra

$$A = 2\int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\alpha dt,$$

et, en multipliant par $2e^{-\alpha^2}d\alpha$,

$$2Ae^{-\alpha^2}d\alpha = 4\int_0^\infty [e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha d\alpha]dt.$$

Intégrons maintenant les deux membres de cette formule par rapport à α, depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$; on aura dans le premier membre

$$2A\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha \quad \text{ou} \quad A^2;$$

à l'égard du second membre, l'intégration relative à α peut être exécutée sous le signe $\int$, et, comme l'intégrale indéfinie de la différentielle $2e^{-\alpha^2(1+t^2)}\alpha d\alpha$ est $-\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2}+$ const., le résultat de l'intégration sera $2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$. Ainsi l'on a

$$A^2 = \pi,$$

et, par conséquent,

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

498. En partant de cette dernière intégrale, on peut en obtenir d'autres qu'il convient de signaler. Par exemple,

si a désigne une quantité positive, et que l'on remplace x par $x\sqrt{a}$, dx par $dx\sqrt{a}$, il viendra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}. \tag{12}$$

En différentiant cette dernière équation n fois de suite par rapport à a, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}x^{2n}dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

et, en faisant $a=1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^{2n}dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}. \tag{13}$$

Si l'on désigne par a une quantité réelle positive ou négative, et que l'on remplace x par $x \pm a$ dans la formule (11), les limites de l'intégration resteront les mêmes, et l'on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \pm 2ax}dx = \sqrt{\pi}\,e^{a^2};$$

remplaçant le signe ambigu du premier membre d'abord par $+$, puis par $-$, et faisant la demi-somme des résultats, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\frac{e^{2ax}+e^{-2ax}}{2}dx = \sqrt{\pi}\,e^{a^2};$$

ou, en changeant x en mx et a en $\frac{n}{m}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2}\frac{e^{2nx}+e^{-2nx}}{2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}\,e^{\frac{n^2}{m^2}}, \tag{14}$$

formule qui suppose essentiellement m positif.

Sur le passage des quantités réelles aux imaginaires.

499. Lorsque deux fonctions sont égales entre elles pour toutes les valeurs réelles de la variable, et qu'elles sont toutes deux développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de cette variable, les coefficients des mêmes puissances sont égaux entre eux dans les deux développements; si donc les séries demeurent convergentes quand on suppose la variable imaginaire, l'égalité des deux fonctions subsistera nécessairement. Cette considération permet d'obtenir les valeurs d'un certain nombre d'intégrales définies nouvelles.

Reportons-nous, par exemple, à la formule (14) du n° 498. Il est évident que les deux membres de cette formule sont développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de n, et que cette convergence ne sera point altérée si l'on remplace n par $n\sqrt{-1}$; on aura donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}e^{-\frac{n^2}{m^2}};$$

on peut faire commencer l'intégrale à zéro, pourvu qu'on divise le second membre par 2, et l'on a ainsi

$$\int_{0}^{\infty} e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Pour donner un nouvel exemple, reprenons la formule (12) du n° 498, où a désigne une quantité positive; en y remplaçant $\sqrt{a}$ par $m(1+\alpha)$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+\alpha)^2m^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m\sqrt{1+\alpha}};$$

les deux membres de cette formule sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de α, pour toutes les valeurs réelles de α comprises entre -1 et $+1$; en outre, ces séries demeurent évidemment convergentes quand α désigne une quantité imaginaire de module inférieur à 1; donc la formule précédente subsistera dans la même hypothèse. Soit $\alpha = \rho\sqrt{-1}$, ρ étant réel et inférieur à 1; on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2+2\rho\sqrt{-1})m^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\rho\sqrt{-1})}$$
$$= \frac{(1-\rho\sqrt{-1})\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)};$$

égalons entre elles les parties réelles et les parties imaginaires, il viendra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2)m^2x^2}\cos(2\rho m^2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2)m^2x^2}\sin(2\rho m^2x^2)\,dx = -\frac{\rho\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)},$$

ou, en posant $(1-\rho^2)m^2 = \mu$, $2\rho m^2 = \nu$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2}\cos(\nu x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2}\sin(\nu x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu^2+\nu^2}};$$

ces formules supposent $\mu > 0$.

Formule de Cauchy.

500. Soient $z = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$ une variable imaginaire, et $f(z)$ une fonction de cette variable qui reste continue

et qui ait une dérivée déterminée pour toutes les valeurs de z dont le module n'est pas supérieur à une quantité donnée R. On a

$$dz = e^{\omega\sqrt{-1}}\,d\rho + \sqrt{-1}\,\rho e^{\omega\sqrt{-1}}\,d\omega,$$

et, par suite,

$$f(z)\,dz = \varphi(\rho, \omega)\,d\rho + \psi(\rho, \omega)\,d\omega,$$

en faisant, pour abréger,

$$\varphi(\rho, \omega) = e^{\omega\sqrt{-1}} f(\rho e^{\omega\sqrt{-1}}),$$
$$\psi(\rho, \omega) = \sqrt{-1}\,\rho e^{\omega\sqrt{-1}} f(\rho e^{\omega\sqrt{-1}}).$$

On a vu (n° 485) que cette expression de $f(z)dz$ est la différentielle exacte d'une fonction des deux variables indépendantes ρ et ω; on a donc (n° 484), en désignant par ρ_0 et ω_0 des valeurs initiales quelconques de ρ et de ω,

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\Big[\varphi(\rho, \omega) - \varphi(\rho, \omega_0)\Big]d\rho = \int_{\omega_0}^{\omega}\Big[\psi(\rho, \omega) - \psi(\rho_0, \omega)\Big]d\omega.$$

Nous prendrons $\rho_0 = 0$ et nous écrirons α au lieu de ω_0; en outre, comme la fonction $f(z)$ reste continue pour les valeurs de z dont le module ne surpasse pas R, les intégrales de la formule précédente auront des valeurs finies si l'on fait $\rho = \mathrm{R}$, $\omega = \alpha + 2\pi$. Mais notre hypothèse relative à la continuité de $f(z)$ implique la condition que cette fonction ait la même valeur pour $\omega = \alpha$ et $\omega = \alpha + 2\pi$, ρ restant le même. Il s'ensuit que le premier membre de notre égalité est nul; d'ailleurs, la fonction $\psi(\rho, \omega)$ étant nulle pour $\rho = 0$, puisque $f(z)$ ne peut être infinie, on aura simplement

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\psi(\mathrm{R}, \omega)\,d\omega = 0,$$

ou

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \mathrm{R}e^{\omega\sqrt{-1}} f'(\mathrm{R}e^{\omega\sqrt{-1}})\,d\omega = 0,$$

ou encore

$$(1) \qquad \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \mathrm{Z} f'(\mathrm{Z})\,d\omega = 0,$$

Z désignant la valeur

$$\mathrm{Z} = \mathrm{R}e^{\omega\sqrt{-1}}.$$

La formule (1) ne diffère que dans la forme de celle que nous avons établie au n° 382, et l'analyse qui nous y a conduit est au fond la même que celle dont nous avons fait usage au numéro cité. Si l'on désigne encore ici par $\mathrm{F}(z)$ une fonction qui reste continue et qui ait une dérivée déterminée pour les valeurs de z dont le module n'est pas supérieur à R, par x une constante réelle ou imaginaire dont le module soit également compris entre o et R, on pourra supposer

$$f(z) = \frac{\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(x)}{z - x}$$

dans la formule (1) (n° 382), et celle-ci deviendra

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}[\mathrm{F}(\mathrm{Z}) - \mathrm{F}(x)]\,d\omega = 0$$

ou

$$(2) \qquad \mathrm{F}(x)\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\,d\omega = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x}\mathrm{F}(\mathrm{Z})\,d\omega;$$

mais on a

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x} = 1 + \frac{x}{\mathrm{Z}} + \frac{x^2}{\mathrm{Z}^2} + \ldots + \frac{x^{\mu-1}}{\mathrm{Z}^{\mu-1}} + \frac{x^{\mu}}{\mathrm{Z}^{\mu}}\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}-x};$$

d'ailleurs on a, si m n'est pas nul,

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{x^m}{\mathrm{Z}^m}\,d\omega = \frac{x^m}{\mathrm{R}^m}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-m\omega\sqrt{-1}}\,d\omega = 0;$$

donc

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}\,d\omega = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} d\omega + \frac{x^{\mu}}{R^{\mu}}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}e^{-\mu\omega\sqrt{-1}}\,d\omega;$$

le module de $\frac{x^{\mu}}{R^{\mu}}$ s'annule pour $\mu = \infty$, et l'on a, en conséquence,

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}\,d\omega = 2\pi;$$

la formule (2) devient donc

$$(3)\qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x}F(Z)\,d\omega.$$

Cette formule de Cauchy ne diffère pas de la formule (12) du n° 382, de laquelle nous avons conclu le développement de la fonction $F(x)$ en série. Différentions-la μ fois par rapport à x, ou, si l'on veut, par rapport au module de x; la différentiation pourra être exécutée sous le signe $\int$, dans le second membre, et l'on aura

$$(4)\qquad F^{(\mu)}(x) = 1.2\ldots\mu\,\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+1}}\,d\omega.$$

Pour $x = 0$, les formules (3) et (4) donnent, en écrivant $Re^{\omega\sqrt{-1}}$ au lieu de Z,

$$(5)\qquad F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} F\left(Re^{\omega\sqrt{-1}}\right)d\omega,$$

$$(6)\quad F^{(\mu)}(0) = 1.2\ldots\mu\,R^{-\mu}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-\mu\omega\sqrt{-1}}F\left(Re^{\omega\sqrt{-1}}\right)d\omega.$$

Enfin, si l'on désigne par x une constante et qu'on applique les formules (5) et (6) à la fonction $F(z) = \mathcal{F}(x+z)$.

on aura, en écrivant r au lieu de R,

$$(7)\qquad \mathcal{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \mathcal{F}\left(x + re^{\omega\sqrt{-1}}\right)d\omega,$$

$$(8)\quad \mathcal{F}^{(\mu)}(x) = 1.2\ldots\mu\, r^{-\mu}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-\mu\omega\sqrt{-1}}\,\mathcal{F}\left(x + re^{\omega\sqrt{-1}}\right)d\omega.$$

Les formules (7) et (8) subsistent pour toutes les valeurs de r telles que la fonction $\mathcal{F}\left(x + re^{\omega\sqrt{-1}}\right)$ reste continue.

501. Les formules précédentes permettent de déterminer un grand nombre d'intégrales définies; nous allons en présenter des exemples.

1° Soit

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{1-z};$$

cette fonction reste continue pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 1. La formule (5) donnera donc, en faisant $\alpha = 0$ et en supposant $\mathrm{R} < 1$,

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - \mathrm{R}e^{\omega\sqrt{-1}}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \mathrm{R}\cos\omega) + \sqrt{-1}\,\mathrm{R}\sin\omega}{1 - 2\mathrm{R}\cos\omega + \mathrm{R}^2}\,d\omega,$$

d'où, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \mathrm{R}\cos\omega}{1 - 2\mathrm{R}\cos\omega + \mathrm{R}^2}\,d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\omega}{1 - 2\mathrm{R}\cos\omega + \mathrm{R}^2}\,d\omega = 0.$$

Il faut remarquer que cette dernière formule est évidente; car les éléments de l'intégrale qui répondent à des valeurs de ω complémentaires à 2π sont égaux et de

signes contraires. Quant à la première formule, elle cesse d'être exacte lorsque R est >1, et dans ce cas sa valeur est nulle; on a, en effet,

$$\frac{1 - \mathrm{R}\cos\omega}{1 - 2\mathrm{R}\cos\omega + \mathrm{R}^2} + \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\omega}{1 - \frac{2}{\mathrm{R}}\cos\omega + \frac{1}{\mathrm{R}^2}} = 1.$$

Si l'on multiplie par $d\omega$ cette identité et qu'on intègre ensuite de 0 à 2π, la première des intégrales du premier membre sera égale à 2π, dans l'hypothèse de $\mathrm{R}<1$; la seconde est donc nulle, et l'on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{R}}\cos\omega}{1 - \frac{2}{\mathrm{R}}\cos\omega + \frac{1}{\mathrm{R}^2}}\, d\omega = 0,$$

dans le cas de $\mathrm{R}=1$, l'intégrale est évidemment égale à π.

2° Soit

$$\mathrm{F}(z) = e^z;$$

la fonction $\mathrm{F}(z)$ reste continue, quelle que soit z, et, si l'on fait $\alpha = 0$, $\mathrm{R} = m$, la formule (5) donnera

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega + m\sin\omega\sqrt{-1}}\, d\omega = 2\pi,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega}\cos(m\sin\omega)\, d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{m\cos\omega}\sin(m\sin\omega)\, d\omega = 0;$$

l'élément de la première intégrale prend les mêmes valeurs quand on donne à ω deux valeurs complémentaires à 2π; il s'ensuit que, si l'on arrête l'intégrale à $\omega = \pi$,

on aura la moitié de la valeur totale; en d'autres termes, on a

$$\int_0^\pi e^{m\cos\omega}\cos(m\sin\omega)\,d\omega = \pi,$$

formule que Poisson a obtenue par une voie différente dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

3° Posons encore

$$F(z) = \log(1+z) = \log(1+\rho e^{\omega\sqrt{-1}}),$$

ω étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Si l'on fait

$$1+z = re^{\psi\sqrt{-1}},$$

on aura

$$1+\rho\cos\omega = r\cos\psi,\quad \rho\sin\omega = r\sin\psi,$$

d'où

$$r = \sqrt{1+2\rho\cos\omega+\rho^2},\quad \psi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\omega}{1+\rho\cos\omega}.$$

La fonction $F(z)$ n'est continue (n° 375) que si le module ρ est inférieur à 1; alors $\cos\psi$ est toujours positif, et l'angle ψ qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ est entièrement déterminé par sa tangente. Supposant donc $R < 1$, la formule (5) donnera

$$\int_{-\pi}^{+\pi}(\log r + \psi\sqrt{-1})\,d\omega = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\log(1+2R\cos\omega+R^2)\,d\omega = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{R\sin\omega}{1+R\cos\omega}\right)d\omega = 0.$$

Emploi des intégrales définies pour représenter les coefficients des séries qui procèdent suivant les sinus ou cosinus des multiples d'une variable.

502. Les intégrales définies

$$(1) \qquad \int_0^\pi \cos ix \cos jx\,dx, \quad \int_0^\pi \sin ix \sin jx\,dx$$

sont nulles toutes les deux lorsque i et j désignent des entiers inégaux. En effet, si l'on fait leur somme et leur différence, on trouve

$$(2) \qquad \int_0^\pi \cos(i-j)x\,dx, \quad \int_0^\pi \cos(i+j)x\,dx,$$

et il est évident que ces intégrales sont nulles, puisque $\cos(i-j)x\,dx$, $\cos(i+j)x\,dx$ sont les différentielles des fonctions

$$\frac{\sin(i-j)x}{i-j}, \quad \frac{\sin(i+j)x}{i+j},$$

qui s'annulent pour $x=0$ et pour $x=\pi$.

Mais, si l'on a $j=i$, la seconde des intégrales (2) s'annule seule, et la première se réduit à $\int_0^\pi dx$ ou à π; donc les deux intégrales

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ix \cos jx\,dx, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ix \sin jx\,dx$$

sont égales à l'unité ou à zéro, selon que les entiers i et j sont égaux ou inégaux. Cette conclusion suppose pourtant que l'on n'a pas $i=j=0$; dans ce cas, la première intégrale (3) est égale à 2 et la seconde est nulle.

503. Cela posé, soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions

de x, et supposons qu'on sache que ces fonctions sont développables en séries convergentes de la manière suivante :

(4) $f(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_i\cos ix + \ldots,$

(5) $F(x) = B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \ldots + B_i\sin ix + \ldots;$

il restera à déterminer les coefficients, ce que l'on peut faire aisément comme il suit.

Multiplions la formule (4) par $\frac{2}{\pi}\cos ix\,dx$ et intégrons ensuite de o à π; d'après ce qui précède, tous les termes du second membre de la formule résultante seront nuls, à l'exception du terme

$$A_i \times \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ix\cos ix\,dx,$$

lequel est égal à A_i; on a donc

(6) $$A_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos ix\,dx;$$

cette formule subsiste pour $i = 0$, parce que nous avons eu soin de représenter par $\frac{1}{2}A_0$ et non par A_0 le premier terme du second membre de la formule (4).

Multiplions de même la formule (5) par $\frac{2}{\pi}\sin ix\,dx$, et intégrons ensuite de o à π; les termes du second membre de la formule résultante seront nuls, à l'exception de

$$B_i \times \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ix\sin ix\,dx,$$

dont la valeur est égale à B_i; on a donc

(7) $$B_i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin ix\,dx.$$

504. Les fonctions $f(x)$, $F(x)$ que nous venons de considérer sont l'une *paire* et l'autre *impaire*; elles ne constituent donc qu'un cas particulier des fonctions périodiques. Désignons généralement par $\mathcal{F}(x)$ une fonction développable en une série convergente procédant suivant les cosinus et les sinus des multiples de x; le développement aura la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_i\cos ix + \ldots\\ + B_1\sin x + B_2\sin 2x + \ldots + B_i\sin ix + \ldots,\end{aligned}\right.$$

et il est facile de déterminer les coefficients. Effectivement, on reconnaît que les intégrales

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ix\cos jx\,dx,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin ix\sin jx\,dx$$

sont égales à l'unité ou à zéro, suivant que les entiers i et j sont égaux ou inégaux; dans le cas de $i=j=0$, la première intégrale est 2 et la seconde est zéro; on voit aussi que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\sin ix\cos jx\,dx$$

est toujours nulle. D'après cela, si l'on multiplie la formule (8) par $\frac{1}{\pi}\cos ix\,dx$, puis par $\frac{1}{\pi}\sin ix\,dx$, et qu'on intègre ensuite de $x=0$ à $x=2\pi$, on aura

$$(9)\qquad A_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(x)\cos ix\,dx,$$

$$(10)\qquad B_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}(x)\sin ix\,dx;$$

la formule (9) n'est pas en défaut pour $i=0$ et, dans ce

cas, elle donne le double A_0 du terme indépendant de x dans le développement de $\mathfrak{F}(x)$.

Il y a souvent avantage à introduire les exponentielles imaginaires dans les développements en série que nous considérons. Ainsi la formule (8) peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A_j e^{jx\sqrt{-1}};$$

alors, en multipliant par $\frac{1}{2\pi} e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx$ et intégrant ensuite de 0 à 2π, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{F}(x) e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(j-i)x\sqrt{-1}}\,dx;$$

l'intégrale $\int_0^{2\pi} e^{(j-i)x\sqrt{-1}}\,dx$ est égale à 2π si l'on a $j=i$, mais elle est nulle pour toutes les autres valeurs de j; par conséquent, on a

$$A_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{F}(x) e^{-ix\sqrt{-1}}\,dx,$$

formule où l'indice i peut avoir toutes les valeurs entières comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Remarques sur le changement de variables dans les intégrales définies.

505. Soit l'intégrale définie $\int_0^X f(x)\,dx$. Si l'on veut substituer à x une autre variable t, telle que

$$x = \varphi(t),$$

et que l'on fasse

$$F(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

on aura (n° 416)

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}(t)\,dt,$$

en désignant par t_0 la valeur de t qui répond à $x = x_0$. Ensuite, si l'on fait $x = \mathrm{X}$, et que l'on nomme T la valeur de t qui répond à $x = \mathrm{X}$, on aura

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{F}(t)\,dt.$$

Cette formule exige quelques précautions pour ne pas donner des résultats inexacts. Lorsque la fonction $\varphi(t)$ n'est pas uniforme, il peut arriver que, pour obtenir une suite continue de valeurs de x allant de x_0 à X, il soit nécessaire d'employer successivement diverses déterminations de la fonction $\varphi(t)$. Dans ce cas, il faut concevoir que l'on fasse des changements de variable successifs.

506. Exemple. — Un exemple très-simple éclaircira ce qui précède. Considérons l'intégrale

$$\int_{0}^{\mathrm{X}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}},$$

où X est positif. Nous avons vu au n° 446 que cette intégrale pouvait être ramenée à la forme elliptique au moyen de la substitution

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

qui donne

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}\left(1 \pm \sqrt{1 - t^3}\right), \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \pm 2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1 - t^3},$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^6}} = \pm \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{\sqrt{t - t^4}}.$$

Si l'on veut que x et t deviennent nuls à la fois, on prendra, pour les petites valeurs de t,

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \sqrt{1-t^3}\right).$$

La variable t croissant de 0 à 1, x croît en même temps de 0 à 1. Pour que la variable x acquière des valeurs supérieures à l'unité, on devra prendre ensuite

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \sqrt{1-t^3}\right).$$

Si l'on fait varier t de 1 à 0, x croît de 1 à l'infini.

Soit T la valeur de t qui répond à $x = \mathrm{X}$. Si l'on a $\mathrm{X} < 1$, on a aussi

$$(1)\qquad \int_0^{\mathrm{X}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Mais si X est > 1, on a

$$\int_0^{\mathrm{X}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_1^{\mathrm{T}} \frac{dt}{-\sqrt{t-t^4}};$$

on peut intervertir les limites de la dernière intégrale du second membre, en changeant le signe de cette intégrale; elle devient alors

$$\int_{\mathrm{T}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \int_0^{\mathrm{T}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

ce qui donne, pour le cas de $\mathrm{X} > 1$,

$$(2)\quad \int_0^{\mathrm{X}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

on voit que cette formule (2) est très-différente de la formule (1) qui se rapporte au cas de $\mathrm{X} < 1$. Les formules (1)

et (2) s'accordent à donner pour $X = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t-t^2}},$$

507. On peut toujours, par une substitution, ramener une intégrale définie à une autre, dans laquelle les limites de l'intégration soient deux quantités choisies arbitrairement.

Par exemple, si l'intégrale proposée est $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, x_0 et X étant des quantités finies, et que l'on pose

$$\frac{x-x_0}{X-x_0} = \frac{t-t_0}{T-t_0}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{X-x_0} = \frac{dt}{T-t_0},$$

t étant une nouvelle variable, t_0 et T des quantités finies quelconques, il est évident que l'on aura $t = t_0$ pour $x = x_0$ et $t = T$ pour $x = X$; en conséquence, la substitution donnera un résultat de la forme

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt.$$

Si l'on emploie la substitution

$$\frac{x-x_0}{X-x_0} = \frac{t-t_0}{t-t_0+1},$$

on aura $t = t_0$ pour $x = x_0$ et $t = +\infty$ pour $x = X$; par conséquent, notre substitution donnera

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{\infty} F(t)\,dt,$$

et, si l'on prend $t_0 = 0$, on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} F(t)\,dt.$$

Il est évident que la substitution inverse ramènera l'intégrale $\int_0^\infty F(t)\,dt$ à la forme $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

508. Nous avons vu qu'une intégrale définie peut être écrite à la manière des intégrales définies, en fixant à volonté la valeur à partir de laquelle on fait commencer l'intégration. Et l'on peut ajouter, d'après ce qui précède, qu'une intégrale indéfinie peut être remplacée, d'une infinité de manières, par une intégrale définie dont les limites peuvent être prises à volonté. Car, soit l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$; on a

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

C étant une constante arbitraire. Écrivons α au lieu de x sous le signe $\int$ du second membre, il viendra

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha + C.$$

$\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha$ est l'intégrale définie de la différentielle $f(\alpha)\,d\alpha$ prise entre les limites x_0 et x; dès lors on peut lui appliquer les transformations dont il a été parlé au numéro précédent.

Considérons, par exemple, l'intégrale indéfinie

$$\int x^{n-1} e^{-x}\,dx,$$

où nous supposerons l'exposant n positif. Cette intégrale est égale à

$$\int_0^x x^{n-1} e^{-x}\,dx + C \quad \text{ou} \quad \int_0^x \alpha^{n-1} e^{-\alpha}\,d\alpha + C,$$

C étant la constante arbitraire. Si l'on pose

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt,$$

elle deviendra

$$\int_0^1 x^n t^{n-1} e^{-tx} dt + C,$$

ou, en faisant sortir x^n du signe $\int$,

$$x^n \int_0^1 t^{n-1} e^{-tx} dt + C.$$

Considérons encore l'intégrale elliptique de première espèce

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}},$$

en faisant, comme dans l'exemple précédent,

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x\,dt,$$

elle deviendra

$$\int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}.$$

Sur les valeurs multiples que peuvent avoir les intégrales prises entre deux limites déterminées.

509. Nous avons démontré au n° 466 que l'on a

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^X f(x)\,dx,$$

quelles que soient les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, pourvu cependant que la fonction $f(x)$ reste continue quand x varie entre les limites de chaque intégration. Cette for-

mule exprime que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

a la même valeur, quelle que soit la manière dont on fait varier x, pour l'amener de la valeur initiale x_0 à la valeur finale X.

Mais cela suppose essentiellement que la fonction $f(x)$ reprend la même valeur quand x reprend la même valeur, et, en outre, que cette variable x varie d'une manière continue pour passer de la valeur x_0 à la valeur X. Lorsque ces conditions ne sont pas remplies et que l'on passe de x_0 à X en suivant deux chemins différents, l'intégrale peut avoir des valeurs très-différentes.

De là, par exemple, les valeurs multiples des expressions

$$\text{arc sin X},\quad \text{arc tang X},\quad \text{arc séc X},$$

qui ne sont autre chose que les valeurs des intégrales

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_0^X \frac{dx}{1+x^2},\quad \int_0^X \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

ces intégrales dépendent non-seulement de la valeur de X, mais aussi de la manière dont x varie pour passer de la limite o à la limite X. Il importe de présenter à ce sujet quelques explications.

510. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dont la limite supérieure X est une quantité quelconque comprise entre -1 et $+1$. Faisons d'abord varier x, dans le même sens, de o à X ; le radical $\sqrt{1-x^2}$ peut

être pris, au départ, avec le signe + ou avec le signe —, à volonté ; mais, comme ce radical ne s'annule pas dans l'intervalle de o à X, il faut, pour la continuité, lui maintenir constamment le même signe. Choisissons le signe + et supposons, pour fixer les idées, que X soit positif; désignons par α la valeur de notre intégrale ainsi définie, et posons

$$\left[\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \alpha,$$

les crochets dont nous faisons usage servant à indiquer que x varie constamment dans le même sens, en passant de la limite o à la limite X. Soit K la valeur que prend α quand on a $X = +1$; on aura

$$\left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = K.$$

La variable x ayant crû de o à sa limite supérieure $+1$, faisons-la décroître de $+1$ à o, et prenons, entre ces limites, l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, savoir : $\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Si l'on maintenait au radical $\sqrt{1-x^2}$ le signe +, l'intégrale dont nous parlons aurait pour valeur $-K$, car ses éléments seraient égaux et de signes contraires aux éléments correspondants de la précédente intégrale. Mais, le radical $\sqrt{1-x^2}$ s'étant annulé, il est naturel de changer son signe, et alors on aura

$$\left[\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = K;$$

la variable x est redevenue nulle ; supposons qu'elle continue à décroître jusqu'à ce qu'elle atteigne sa limite in-

férieure -1 : le radical $\sqrt{1-x^2}$ devra garder le signe $-$, puisqu'il ne s'annule pas, et l'on aura encore

$$\left[\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \mathrm{K},$$

car les éléments de cette intégrale et les éléments de la précédente sont égaux chacun à chacun et de même signe.

Mais, pour $x = -1$, le radical $\sqrt{1-x^2}$ s'annule de nouveau, et on doit lui rendre le signe $+$ quand x vient à croître de -1 à 0; on aura donc

$$\left[\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \mathrm{K},$$

et, si l'on fait croître de nouveau x de 0 à X, on retombera sur la valeur α.

Il résulte de là que si, pour passer de 0 à X, on fait croître x de 0 à $+1$, qu'on fasse décroître ensuite cette variable de $+1$ à -1, et qu'on la fasse croître enfin de -1 à X, l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{X}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

aura la valeur $4\mathrm{K} + \alpha$.

Si, au lieu de procéder comme nous venons de le faire, on fait d'abord décroître x de 0 à -1, qu'on la fasse croître ensuite de -1 à $+1$, décroître de $+1$ à 0, et croître enfin de 0 à X, on aura, comme il est facile de le voir,

$$\left[\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \left[\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \left[\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$
$$= \left[\int_1^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = -\mathrm{K},$$

et alors la valeur de notre intégrale sera $-4K+\alpha$. Dans ce cas, comme dans le précédent, quand x a atteint la limite X de l'intégration, le radical $\sqrt{1-x^2}$ a la valeur $+\sqrt{1-X^2}$.

On voit, d'après cela, que l'intégrale considérée aura la valeur

$$4nK+\alpha,$$

où n désigne un entier positif ou négatif si x, en variant de o à X, passe par chacune de ses limites $+1$ et -1 un nombre de fois égal à la valeur absolue de n.

Supposons que, après avoir atteint un nombre $\pm n$ de fois les limites $+1$ et -1, x ait repris la valeur zéro; à ce moment faisons-la croître de o à $+1$, l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ relative à cet intervalle sera égale à $+K$; faisons décroître ensuite x de $+1$ à o, nous aurons encore une intégrale correspondante égale à $+K$, car dx et $\sqrt{1-x^2}$ sont ici négatifs; faisons croître enfin x de o à X, le radical $\sqrt{1-x^2}$ ne s'annulant pas, on doit lui conserver le signe $-$; par conséquent, l'intégrale relative à ce nouvel intervalle sera $-\alpha$.

Donc, si pour passer de o à X la variable x atteint l'une des limites $+1$, -1 une fois de plus que l'autre limite, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

sera

$$(4n+2)K-\alpha,$$

et, quand x aura atteint la limite de l'intégration, la valeur du radical $\sqrt{1-x^2}$ sera $-\sqrt{1-X^2}$.

Nous avons supposé X positif; mais il est évident que

l'on a

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^{X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

pourvu que les valeurs successives de x variant de o à $-X$ soient respectivement égales et de signes contraires aux valeurs de x variant de o à $+X$.

Il résulte de cette analyse que, si l'on pose

$$u = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

x et $\sqrt{1-x^2}$ seront des fonctions bien déterminées de la variable u, et que ces fonctions auront la période $4K$, qui n'est autre chose que la circonférence 2π. Nous ne retrouvons que des résultats bien connus; mais il était très-important de montrer comment ces résultats peuvent être tirés de la considération des intégrales.

511. L'intégrale $\int_0^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ se ramène à celle que nous venons d'étudier par le changement de x en $\frac{1}{x}$; il n'y a donc pas lieu de s'en occuper; mais nous devons considérer l'intégrale

$$\int_0^{x} \frac{dx}{1+x^2},$$

dont la différentielle est rationnelle.

Posons

$$\left[\int_0^{X} \frac{dx}{1+x^2}\right] = c,$$

les crochets indiquant, comme précédemment, que x

varie de o à X, toujours dans le même sens; soit aussi

$$\left[\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\right] = \text{K}.$$

Pour passer de $x = 0$ à $x = \text{X}$, on peut faire croître x de o à $+\infty$, changer le signe de cette variable, la faire croître de nouveau de $-\infty$ à o, et la faire varier enfin dans le même sens de o à X; ou bien on peut faire décroître x de o à $-\infty$, puis de $+\infty$ à o, et la faire varier dans le même sens de o à X.

Si l'on fait d'abord croître x de o à $+\infty$, puis de $-\infty$ à o, comme on a évidemment

$$\left[\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}\right] = \text{K},$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\text{X} \frac{dx}{1+x^2}$$

sera évidemment $2\text{K} + \alpha$. Si, au contraire, on fait décroître x de o à $-\infty$, puis de $+\infty$ à o, on aura

$$\left[\int_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2}\right] = \left[\int_{+\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}\right] = -\text{K},$$

et, par conséquent, la valeur de notre intégrale sera $-2\text{K} + \alpha$.

Il résulte de là que cette intégrale aura la valeur

$$2n\text{K} + \alpha,$$

si x varie de o à X en passant par les deux infinis un nombre de fois égal à la valeur absolue de l'entier n. On voit enfin que, si l'on pose

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

x sera une fonction bien déterminée de u, et que cette fonction aura la période de $2K = \pi$.

De la double période des fonctions elliptiques.

512. Les considérations qui précèdent permettent d'établir facilement une propriété fondamentale des fonctions elliptiques.

Nous avons nommé *fonction elliptique* de première espèce (nº 435) l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

où k^2 est < 1; la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ reste réelle tant que la variable x est comprise entre -1 et $+1$. Intégrons cette différentielle entre les limites 0 et 1, en supposant que x croisse constamment de l'une des limites à l'autre, et prenons les radicaux positivement; désignons par K l'intégrale ainsi obtenue, que Legendre a nommée *intégrale complète;* on aura

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Lorsque x est comprise entre 1 et $\frac{1}{k}$ ou entre -1 et $-\frac{1}{k}$, la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ est imaginaire, et elle est égale au produit de

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

par $\sqrt{-1}$. Intégrons cette dernière différentielle en faisant croître x de 1 à $\frac{1}{k}$ et en prenant les radicaux positivement:

si l'on nomme K' l'intégrale ainsi obtenue, on aura

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - k^2 x^2}}.$$

Il est facile de la ramener aux limites 0 et 1 ; posons effectivement

$$k'^2 = 1 - k^2 \quad \text{ou} \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

et employons la substitution

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{1 - k'^2 t^2}, \quad dx = -\frac{k'^2 t dt}{k\sqrt{1 - k'^2 t^2}}.$$

Les limites de l'intégration relatives à t seront 1 et 0 ; si on les permute entre elles en changeant le signe de la différentielle, puis qu'on remette la lettre x au lieu de t, il viendra

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k'^2 x^2}}.$$

Les modules k, k' ont été nommés par Legendre *modules complémentaires ;* pareillement, les deux intégrales elliptiques

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k'^2 x^2}},$$

dont les modules sont k et k', ont été appelées par lui *fonctions complémentaires,* et il en résulte que K et K' sont deux *intégrales elliptiques complètes complémentaires.*

513. Cela posé, faisons, conformément aux notations du n° 438,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}} = u,$$

et

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos\operatorname{am} u, \quad \sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta\operatorname{am} u.$$

Soient X une valeur de x comprise entre -1 et $+1$, et α la valeur correspondante de u, quand on intègre en faisant varier x dans le même sens de o à X, et en prenant positivement les deux radicaux $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 - k^2 x^2}$; on aura

$$(1) \quad X = \sin\operatorname{am}\alpha, \quad \sqrt{1 - X^2} = \cos\operatorname{am}\alpha, \quad \sqrt{1 - k^2 X^2} = \Delta\operatorname{am}\alpha.$$

Supposons $X > 0$ et intégrons la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}$ en faisant croître x de o à 1, en la faisant décroître ensuite de 1 à zéro, et en la faisant décroître de nouveau de o à $-X$. L'intégrale relative au premier intervalle sera égale à K ; dans le deuxième intervalle, le radical $\sqrt{1 - x^2}$ devient négatif, après s'être annulé, et l'intégrale correspondante est encore égale à K ; enfin, dans le dernier intervalle, le radical $\sqrt{1 - x^2}$ reste négatif et l'intégrale correspondante

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}$$

est évidemment égale à α. D'après cela, et en remarquant que $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ reste positif, on voit que

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -X &= \sin\operatorname{am}(2K + \alpha), \\ -\sqrt{1 - X^2} &= \cos\operatorname{am}(2K + \alpha), \\ \sqrt{1 - k^2 X^2} &= \Delta\operatorname{am}(2K + \alpha); \end{aligned} \right.$$

il est évident qu'on aurait obtenu les mêmes formules en supposant $X < 0$. En les comparant aux précédentes,

et en écrivant u au lieu de x, on a

$$(3)\quad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(2K + u) = -\sin \mathrm{am}\, u, \\ \cos \mathrm{am}(2K + u) = -\cos \mathrm{am}\, u, \\ \Delta \mathrm{am}(2K + u) = \Delta \mathrm{am}\, u. \end{cases}$$

Ainsi $\sin \mathrm{am}\, u$ et $\cos \mathrm{am}\, u$ ne font que changer de signe quand on ajoute à la variable la constante $2K$; il en résulte que ces fonctions ne changeront pas si l'on répète deux fois cette addition; on a donc

$$(4)\quad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(4K + u) = \sin \mathrm{am}\, u, \\ \cos \mathrm{am}(4K + u) = \cos \mathrm{am}\, u, \end{cases}$$

ce qui exprime que les fonctions $\sin \mathrm{am}\, u$ et $\cos \mathrm{am}\, u$ ont la période $4K$; la dernière des équations (3) exprime que $\Delta \mathrm{am}\, u$ a la période $2K$.

514. La valeur X étant toujours positive et inférieure à 1, supposons que, pour passer de 0 à X, on fasse croître la variable x de 0 à $\frac{1}{k}$ et qu'on la fasse décroître ensuite de $\frac{1}{k}$ à X, les radicaux $\sqrt{1 - x^2}$ et $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ étant toujours pris au départ avec le signe +. De 0 à 1, l'intégrale de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}$$

est égale à K; de 1 à $\frac{1}{k}$ cette différentielle est imaginaire et a pour valeur

$$\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - k^2 x^2}};$$

le radical $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ doit toujours être pris avec le signe + mais le signe de $\sqrt{x^2 - 1}$ est indéterminé; nous sommes

libre de prendre le signe +, au départ, à cause de l'ambiguïté du signe de $\sqrt{-1}$. De 1 à $\frac{1}{k}$ l'intégrale de la précédente différentielle sera donc $K'\sqrt{-1}$ (n° 512); x décroissant ensuite de $\frac{1}{k}$ à 1, le radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ qui vient de s'annuler doit être pris avec le signe —, et l'intégrale relative à l'intervalle que nous considérons sera encore $K'\sqrt{-1}$. Il reste à faire décroître x de 1 à X; alors la différentielle redevient réelle, le radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ demeure négatif, mais rien ne détermine le signe de $\sqrt{1-x^2}$ qui vient de passer de l'imaginaire au réel. Je placerai le signe ambigu ± devant ce radical, et alors l'intégrale relative au dernier intervalle que nous considérons sera, en mettant les signes en évidence,

$$\int_1^X \frac{dx}{(\pm\sqrt{1-x^2})(-\sqrt{1-k^2x^2})};$$

comme X est < 1, dx est négatif, et la précédente intégrale a évidemment pour valeur $\pm(K-z)$. Ainsi, quand x passe de 0 à X en suivant la marche que nous avons adoptée, on obtient une intégrale dont la valeur est

$$K + 2K'\sqrt{-1} \pm (K-z),$$

et l'on a

$$(5)\quad \begin{cases} X = \sin \operatorname{am}\left[K + 2K'\sqrt{-1} \pm (K-z)\right], \\ \pm\sqrt{1-X^2} = \cos \operatorname{am}\left[K + 2K'\sqrt{-1} \pm (K-z)\right], \\ -\sqrt{1-k^2X^2} = \Delta \operatorname{am}\left[K + 2K'\sqrt{-1} \pm (K-z)\right], \end{cases}$$

le signe ambigu ± devant être partout remplacé soit par +, soit par —; quel que soit le signe qu'on adopte, on est conduit, comme on va le voir, au même résultat.

La comparaison des formules (5) aux formules (1)

donne, en remplaçant d'abord le signe $\pm$ par $-$ et remettant u au lieu de α,

$$(6)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(2K'\sqrt{-1}+u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am}(2K'\sqrt{-1}+u) = -\cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(2K'\sqrt{-1}+u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Remplaçons u par $u+2K$ dans la deuxième de ces formules et par $u+2K'\sqrt{-1}$ dans la troisième, on aura, à cause de cette même formule et de la deuxième équation (3),

$$(7)\quad \begin{cases} \cos \operatorname{am}(2K+2K'\sqrt{-1}+u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(4K'\sqrt{-1}+u) = \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

La première formule (6) montre que $\sin \operatorname{am} u$ admet la période $2K'\sqrt{-1}$; les équations (7) expriment que les fonctions $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ ont, l'une la période $2K+2K'\sqrt{-1}$, l'autre la période $4K'\sqrt{-1}$.

Si l'on remplace le signe $\pm$ par $+$ dans les formules (5), la comparaison aux formules (1) donne

$$(8)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(2K+2K'\sqrt{-1}-u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am}(2K+2K'\sqrt{-1}-u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(2K+2K'\sqrt{-1}-u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Or, il est évident que, si x varie de la même manière de 0 à $+X$ et de 0 à $-X$, l'intégrale de la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ aura, dans les deux cas, des valeurs égales et de signes contraires, tandis que la valeur de $\sqrt{1-X^2}$ ou celle de $\sqrt{1-k^2X^2}$ sera la même. Il s'ensuit que $\sin \operatorname{am} u$ est une fonction impaire de u, c'est-à-dire une fonction qui change de signe avec u en conservant

la même valeur absolue, tandis que $\cos \operatorname{am} u$ et $\Delta \operatorname{am} u$ sont des fonctions paires. Cela posé, changeons u en $-u$ dans les formules (8); supprimons ensuite la demi-période $2K$, en changeant les signes des seconds membres, on retombera sur les équations (6), qui ont lieu ainsi, pour le cas de u positive et pour celui de u négative. On serait arrivé aux mêmes résultats en partant de l'hypothèse $X < 0$.

On voit, par cette analyse, que les fonctions $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ ont la propriété singulière d'être doublement périodiques; la première fonction admet les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$, la deuxième les périodes $4K$ et $2K + 2K'\sqrt{-1}$; enfin la troisième a les deux périodes $2K$ et $4K'\sqrt{-1}$. Pour établir cette proposition, nous n'avons considéré que les valeurs réelles de la première fonction $\sin \operatorname{am} u$, mais nous ne saurions développer davantage ces considérations sans sortir des limites que nous nous sommes fixées.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

Des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.

515. Legendre a désigné sous le nom d'*intégrales eulériennes* les deux intégrales définies

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx,$$

qui ont été étudiées pour la première fois par Euler et qui ont fait depuis l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres. La théorie de ces intégrales a une grande importance, et nous nous proposons de la développer dans ce Chapitre, qui servira de complément au précédent.

La première intégrale dépend des deux paramètres p et q : nous la désignerons par la notation $\mathrm{B}(p, q)$; la deuxième intégrale ne dépend que du seul paramètre p, et nous la représenterons avec Legendre par le symbole $\Gamma(p)$. On aura, en conséquence,

$$(1) \qquad \mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

$$(2) \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx,$$

e désignant ici, comme à l'ordinaire, la base des logarithmes népériens.

Les fonctions $B(p, q)$ sont dites intégrales eulériennes de première espèce, et les fonctions $\Gamma(p)$ intégrales de seconde espèce. Pour que ces fonctions restent finies, il faut et il suffit que les paramètres p et q soient positifs, ou au moins que leur partie réelle soit positive, s'ils sont imaginaires. Dans ce dernier cas, il faut écrire $e^{p \log x}$ au lieu de x^p, et ainsi des autres.

On peut donner aux intégrales B une autre forme qu'il est utile d'indiquer. Si l'on pose

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

dans la formule (1), l'intégrale relative à y devra être prise entre les limites o et ∞ ; on aura donc, en remettant x au lieu de y,

$$(3) \qquad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx,$$

ou encore

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}} + \int_1^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}};$$

si dans la deuxième intégrale on remplace x par $\frac{1}{x}$, dx par $-\frac{dx}{x^2}$, les limites qui étaient 1 et ∞ deviendront 1 et o ; on pourra les renverser en changeant le signe de l'intégrale, et l'on aura

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}} + \int_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1+x)^{p+q}},$$

ou

$$(4) \qquad B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$$

Cette formule (4) montre que la fonction $B(p, q)$ est symétrique par rapport aux deux quantités p et q dont elle

dépend, en sorte que l'on a

$$B(p, q) = B(q, p);$$

au surplus, cette propriété peut aussi être reconnue sur la formule (1), car, si l'on y change x en $1-x$, on transforme immédiatement $B(p, q)$ en $B(q, p)$.

Réduction des intégrales de première espèce à celles de seconde espèce.

516. Nous allons montrer que les fonctions $B(p, q)$ peuvent s'exprimer par des fonctions Γ, en sorte qu'il n'y aura plus à s'occuper que de ces dernières.

Si l'on désigne par m une constante positive et que dans la formule (2) du n° 515 on pose $x = mx'$, il viendra

$$(1) \qquad \Gamma(p) = m^p \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx',$$

d'où

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1}\, dx',$$

formule dont on fait en analyse un fréquent usage et qui va nous servir pour résoudre la question que nous avons en vue. Effectivement, on a d'après cette formule

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx';$$

donc la formule (3) du n° 515 peut s'écrire comme il suit:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{p-1}\, dx \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1}\, dx'.$$

Il est permis d'intervertir l'ordre des intégrations et l'on peut écrire

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1}\, dx' x'^p \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1}\, dx;$$

mais, d'après la formule (1), $x'^p \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1}\,dx$ est égale à $\Gamma(p)$; donc

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1}\,dx',$$

ou

$$(2) \qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

ce qui est le résultat annoncé. Nous passerons maintenant à l'examen des principales propriétés des fonctions de deuxième espèce.

Première propriété des fonctions Γ.

517. En intégrant par parties la différentielle $x^{p-1} \times e^{-x}\,dx$, on a

$$\int x^{p-1} e^{-x}\,dx = -x^{p-1}e^{-x} + (p-1)\int e^{-x} x^{p-2}\,dx.$$

Si l'on a $p > 1$, la partie intégrée disparaît aux deux limites o et ∞, et l'on a

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,dx = (p-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{p-2}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1);$$

cette équation exprime la première propriété des fonctions Γ; on en déduit immédiatement, en désignant par m un entier inférieur à p,

$$(2) \qquad \Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots(p-m)\,\Gamma(p-m),$$

d'où il suit que, si la fonction Γ est connue pour toutes les valeurs de l'*argument* p comprises entre o et 1, ou,

plus généralement, comprises entre deux entiers consécutifs, la même fonction sera aussi connue pour toutes les autres valeurs réelles de l'argument.

Si p est un nombre entier et que l'on fasse $m = p - 1$ dans l'équation (2), il viendra

$$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1)\Gamma(1);$$

mais, comme l'intégrale $\int e^{-x}dx$ est égale à $-e^{-x} + \text{const.}$, on a

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx = \Gamma(1) = 1;$$

donc

$$(4) \qquad \Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1),$$

en sorte que, si p est un nombre entier supérieur à 1, $\Gamma(p)$ se réduit au produit des $p-1$ premiers nombres entiers, résultat déjà établi au n° 493.

Deuxième propriété des fonctions Γ.

518. La propriété que nous allons établir permet de réduire à $\frac{1}{2}$ l'intervalle d'une unité dans lequel il suffit d'effectuer le calcul de la fonction Γ d'après la première propriété; elle donne, par exemple, les valeurs de cette fonction qui répondent aux valeurs de l'argument, comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, lorsqu'on connaît les valeurs relatives aux limites 0 et $\frac{1}{2}$.

Si, dans la formule (2) du n° 516, on fait $q = 1 - p$, p étant supposé ici compris entre 0 et 1, il viendra, à cause de $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \mathrm{B}(p, 1-p),$$

et, à cause de la formule (3) du n° 515,

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x}.$$

Mais nous savons (n° 489) que l'intégrale contenue dans cette formule a pour valeur $\frac{\pi}{\sin p\pi}$; on a donc

$$(1)\qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Telle est la formule qui exprime la deuxième propriété de la fonction Γ. Si l'on y suppose $p = \frac{1}{2}$, elle donne

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

d'où

$$(2)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Cette formule ne diffère pas de celle que nous avons établie au n° 497. Effectivement, si l'on fait $p = \frac{1}{2}$ dans la formule (2) du n° 515 et qu'on écrive x^2 au lieu de x, on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Troisième propriété des fonctions Γ.

519. Si l'on suppose $q = p$ dans la formule (1) du n° 515, il viendra

$$(1)\qquad \mathrm{B}(p,p) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} dx.$$

On voit que le coefficient de dx sous le signe $\int$ prend des valeurs égales quand x reçoit les valeurs $\frac{1}{2}+h$ et $\frac{1}{2}-h$ également distantes de $\frac{1}{2}$; il s'ensuit que, dans la formule précédente, on pourra prendre $\frac{1}{2}$ au lieu de 1 pour limite supérieure, pourvu qu'on double le résultat. On aura ainsi

$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}dx.$$

Si l'on fait maintenant $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$, $dx=-\frac{1}{4}\frac{dy}{\sqrt{y}}$, les limites de l'intégrale relative à y seront 1 et 0; en renversant ces limites et changeant le signe du résultat, on aura

$$B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{p-1}dy,$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad B(p,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right),$$

et, si en faisant usage de la formule (2) du n° 516 on remplace les B par leurs valeurs en Γ, puis qu'on se rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, il viendra

$$(3)\qquad \Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

Cette équation (3) exprime la troisième propriété des fonctions Γ; elle est contenue dans une autre beaucoup plus générale que nous établirons plus loin.

Représentation de la fonction $\log \Gamma(x)$ *par une intégrale définie.*

520. Si l'on différentie la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha,$$

et qu'on représente par $\Gamma'(x)$ la dérivée de $\Gamma(x)$, il viendra

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} \log \alpha \, d\alpha,$$

la caractéristique log désignant un logarithme népérien. La formule (1) du n° 516, où l'on fait $p = 1$, donne

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha z} dz;$$

si l'on multiplie cette formule par $d\alpha$ et qu'on l'intègre ensuite entre les limites 1 et α, on aura, comme nous l'avons dit au n° 494,

$$\log \alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\alpha z}}{z} dz.$$

En remplaçant $\log \alpha$ par cette valeur dans l'expression précédente de $\Gamma'(x)$, on obtient

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\alpha z}}{z} dz;$$

on peut intervertir l'ordre des intégrations et écrire

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha - \int_0^\infty e^{-(1+z)\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha \right].$$

La première des intégrales qui figurent dans la parenthèse

est $\Gamma(x)$; la deuxième a pour valeur (n° 316) $\dfrac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}$. On a donc

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x}\right]\frac{dz}{z},$$

ou, en divisant par $\Gamma(x)$,

$$(1) \qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left[e^{-z} - (1+z)^{-x}\right]\frac{dz}{z};$$

si l'on multiplie les deux membres de cette formule par dx, et que l'on intègre ensuite entre les limites 1 et x, il viendra, à cause de $\log\Gamma(1) = \log 1 = 0$,

$$(2) \quad \log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{\log(1+z)}\right]\frac{dz}{z}.$$

On peut simplifier cette expression de $\log\Gamma(x)$ en opérant comme il suit : en faisant $x = 2$, il vient, à cause de $\log\Gamma(2) = \log 1 = 0$,

$$(3) \qquad 0 = \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{z(1+z)^{-2}}{\log(1+z)}\right]\frac{dz}{z},$$

et, si l'on multiplie l'équation (3) par $x-1$, puis qu'on la retranche ensuite de l'équation (2), il viendra

$$(4) \quad \log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{z}\right]\frac{dz}{\log(1+z)};$$

enfin, si l'on pose $\log(1+z) = \alpha$, $z = e^\alpha - 1$, l'intégrale relative à α devra être prise entre les mêmes limites 0 et ∞, et l'on aura définitivement

$$(5) \quad \log\Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right]\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Développement de la fonction $\log\Gamma(x)$ *en série.*

521. En différentiant la formule (5) du numéro précédent, on a

$$(1)\qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right) d\alpha,$$

et, en différentiant de nouveau,

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\, d\alpha.$$

Remplaçons le facteur $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ par sa valeur

$$1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \ldots,$$

nous aurons

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha\, d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha(x+1)}\alpha\, d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha(x+2)}\alpha\, d\alpha + \ldots,$$

ou, en évaluant chaque terme au moyen de la formule (1) du n° 516,

$$(2)\qquad \frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \ldots,$$

formule dont le second membre est une série qui reste convergente, quel que soit x.

Si l'on intègre les différents termes de la formule (2) multipliée par dx entre les limites 1 et x, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -C &+ \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et la série qui figure dans le second membre sera convergente comme celle d'où elle est tirée par l'intégration. Quant à la quantité $-C$, elle est évidemment égale à la valeur que prend pour $x=1$ la dérivée $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$, et l'on a, par l'équation (1),

$$(4) \qquad C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha} d\alpha;$$

cette quantité C est connue sous le nom de *constante d'Euler;* nous verrons tout à l'heure comment on peut calculer sa valeur.

Si l'on intègre entre les limites 1 et x la formule (3) multipliée par dx, il viendra, à cause de $\log \Gamma(1) = 0$,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(x) = & -C(x-1) + \left(\frac{x-1}{1} - \log \frac{x}{1} \right) \\ & + \left(\frac{x-1}{2} - \log \frac{x+1}{2} \right) + \ldots + \left(\frac{x-1}{m} - \log \frac{x+m-1}{m} \right) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

formule dont le second membre est une série convergente comme celle qui figure dans la formule (3). On peut se débarrasser aisément de la constante C; si, en effet, on pose $x=2$ dans la formule (5), il viendra

$$(6) \quad 0 = -C + \left(\frac{1}{1} - \log \frac{2}{1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{m} - \log \frac{m+1}{m} \right) + \ldots,$$

et, si l'on retranche de l'équation (5) le produit de l'équation (6) par $x-1$, on aura

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(x) = & \left[(x-1) \log \frac{2}{1} - \log \frac{x}{1} \right] \\ & + \left[(x-1) \log \frac{3}{2} - \log \frac{x+1}{2} \right] + \ldots \\ & + \left[(x-1) \log \frac{m+1}{m} - \log \frac{x+m-1}{m} \right] + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou, pour abréger,

$$(8)\quad \log\Gamma(x)=\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(x-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\log\left(1+\frac{x-1}{m}\right)\right].$$

Désignons par $\log(1+\varepsilon_m)$ la somme des termes qui suivent le $m^{\text{ième}}$ dans la série (7) ou (8); comme cette série est convergente, la quantité ε_m s'annulera par $m=\infty$, et l'on aura

$$\log\Gamma(x)=\left[(x-1)\log\frac{2}{1}-\log\frac{x}{1}\right]+\ldots$$
$$+\left[(x-1)\log\frac{m+1}{m}-\log\frac{x+m-1}{m}\right]+\log(1+\varepsilon_m)$$

ou, en revenant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma(x)=\frac{(1.2\ldots m)m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}(1+\varepsilon_m);$$

le facteur $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x-1}$ se réduisant à 1 pour $m=\infty$, on peut le supposer compris dans $1+\varepsilon_m$ et écrire

$$(9)\qquad \Gamma(x)=\frac{(1.2\ldots m)m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(10)\qquad \Gamma(x)=\lim\frac{(1.2\ldots m)m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)},\quad \text{pour } m=\infty.$$

Remarquons encore que la formule (6) donne pour la constante d'Euler

$$(11)\quad C=\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\log m\right),\quad \text{pour } m=\infty.$$

Développement de la fonction $\log\Gamma(1+x)$ *en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de* x *pour les valeurs de* x *comprises entre* -1 *et* $+1$.

522. Si l'on change x en $x+1$ dans la formule (2) du n° 521, on aura

$$\frac{d^2\log\Gamma(1+x)}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \ldots,$$

et, en différentiant $n-2$ fois,

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n\log\Gamma(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \ldots\right];$$

posons généralement

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots,$$

on aura, pour $x=0$,

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n\log\Gamma(1+x)}{dx^n} = (-1)^n\frac{S_n}{n},$$

si n est >1, et l'on a d'ailleurs, pour $x=0$,

$$\frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx} = -C, \quad \log\Gamma(1+x) = 0;$$

la formule de Maclaurin donnera donc, pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$,

$$(1) \quad \log\Gamma(1+x) = -Cx + S_2\frac{x^2}{2} - S_3\frac{x^3}{3} + S_4\frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Cette formule n'est pas commode pour le calcul, parce que les sommes S décroissent peu rapidement, mais on peut obtenir des séries plus convergentes; si à la dernière

équation on ajoute la suivante :

$$0 = -\log(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

il viendra

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \log\Gamma(1+x) = {} & -\log(1+x) + (1-C)x \\ & + \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 - \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

les termes de cette série décroissent assez rapidement, mais on peut encore augmenter sa convergence. En changeant x en $-x$ dans la formule précédente, on a

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \log\Gamma(1-x) = {} & -\log(1-x) - (1-C)x \\ & + \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 + \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Mais on a

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

et, en multipliant,

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x},$$

d'où

$$\log\Gamma(1+x) + \log\Gamma(1-x) = \log\frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

Ajoutant cette équation avec l'équation (2), retranchant ensuite l'équation (3), et divisant le résultat par 2, il viendra

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \log\Gamma(1+x) = {} & \frac{1}{2}\log\frac{\pi x}{\sin\pi x} - \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + (1-C)x \\ & - (S_3-1)\frac{x^3}{3} - (S_5-1)\frac{x^5}{5} - (S_7-1)\frac{x^7}{7} - \ldots. \end{aligned} \right.$$

D'après les propriétés démontrées plus haut, la fonction Γ sera connue pour toutes les valeurs positives de l'ar-

gument, si l'on connaît cette fonction pour les valeurs comprises entre o et $\frac{1}{2}$, ou entre $\frac{1}{2}$ et 1, ou entre 1 et $1+\frac{1}{2}$, ou etc.; or l'équation (4) permet de calculer très-rapidement $\log\Gamma(1+x)$ pour les valeurs de x comprises entre o et $\frac{1}{2}$. Dans son *Traité des fonctions elliptiques,* Legendre a donné avec seize décimales les valeurs de S_n depuis $n=2$ jusqu'à $n=35$.

Si dans la formule (4) on fait $x=1$ et $x=\frac{1}{2}$, ce qui donne $\Gamma(x+1)=1$ et $\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, on aura deux équations qui pourront servir au calcul de la constante C; on trouve, en observant que $\log\frac{\pi x}{\sin\pi x}+\log(1-x)=0$ pour $x=1$,

$$1-C=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{3}(S_3-1)+\frac{1}{5}(S_5-1)+\frac{1}{7}(S_7-1)+\ldots,$$

$$1-C=\log\frac{3}{2}+\frac{1}{3.4}(S_3-1)+\frac{1}{5.16}(S_5-1)+\frac{1}{7.64}(S_7-1)+\ldots;$$

quatorze sommes S suffisent pour obtenir C avec quinze décimales; on trouve ainsi

$$C=0,57721\,56649\,01532\,8; \tag{5}$$

nous ferons connaître plus loin un procédé plus expéditif pour calculer cette constante, et qui n'exige pas le calcul préalable des sommes S.

Évaluation de la fonction $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ dans le cas où x est un nombre commensurable.

523. La fonction $\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ peut s'exprimer, sous forme finie, par un nombre limité de termes, toutes les fois

que x est un nombre commensurable. Si, en effet, on ajoute les deux équations (1) et (4) du n° 521, il viendra

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\, d\alpha,$$

ou, en posant $e^{-\alpha} = z$,

$$(1) \qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\, dz;$$

si l'on a $x = \frac{m}{n}$, m et n étant entiers, et que l'on fasse $z = \alpha^n$, on aura

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -C + n\int_0^1 \frac{\alpha^{n-1} - \alpha^{m-1}}{1 - \alpha^n}\, d\alpha \left(\text{pour } x = \frac{m}{n}\right);$$

la différentielle sous le signe $\int$ est ici une fraction rationnelle, et, par conséquent, son intégrale pourra s'exprimer par des quantités algébriques, logarithmiques ou circulaires. Par exemple, on aura

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -C - 2\int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + \alpha} = -C + \log 4 \left(\text{pour } x = \frac{1}{2}\right).$$

Si la quantité x se réduit à un nombre entier, la formule (1) donne

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 (1 + z + z^2 + \ldots + z^{x-2})\, dz,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} + C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x - 1};$$

la somme contenue dans le second membre de cette formule est connue sous le nom de *suite harmonique*.

Recherche du minimum de la fonction $\Gamma(x)$.

524. La formule (2) du n° 521 montre que la fonction $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ est positive pour toutes les valeurs de la variable x supposée réelle et positive; en conséquence, la fonction $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ ou $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ est constamment croissante; d'ailleurs on voit, par la formule (3) du même numéro, que cette fonction est égale à $-\infty$ pour $x=0$ et à $+\infty$ pour $x=+\infty$. Il suit de là que la dérivée $\Gamma'(x)$ ne peut s'annuler qu'une seule fois, et par suite que la fonction $\Gamma(x)$ n'offre qu'un seul minimum. Ce minimum a lieu nécessairement pour une valeur de x comprise entre 1 et 2, puisque l'on a $\Gamma(2)=\Gamma(1)$; quand x est infiniment petit, la fonction $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}=\frac{1}{x}$ est infinie; quand x croît jusqu'à ∞, $\Gamma(x)$ décroît jusqu'à ce qu'elle ait atteint son minimum, et elle croît ensuite jusqu'à ∞.

Si l'on veut obtenir la valeur de x qui répond au minimum de $\Gamma(1+x)$, il suffira de déterminer la racine positive unique de l'équation $\Gamma'(1+x)=0$ ou $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}=0$. Cette équation, d'après la formule (2) du n° 522, est

$$0=-\frac{1}{1+x}+(1-C)+(S_2-1)x-(S_3-1)x^2+\ldots,$$

et l'on reconnaît facilement que la racine est comprise entre 0,4 et 0,5; on trouve ensuite par les méthodes d'approximation connues

$$1+x=1,461632\ldots;$$

et l'on obtient, par la formule (2) ou (4) du n° 522,

$$\log \text{vulg}\, \Gamma(1+x) = \bar{1},9472392,$$

d'où

$$\Gamma(1+x) = 0,8856032.$$

Remarque sur l'interpolation de la fonction numérique $1.2.3\ldots(x-1)$.

525. Puisque l'on a

$$\Gamma(x) = 1.2.3\ldots(x-1),$$

quand x est un nombre entier, la fonction $\Gamma(x)$ peut servir à l'interpolation de la suite dont le terme général est $1.2.3\ldots(x-1)$. La formule précédente exprime, en effet, ce produit par le moyen d'une fonction continue de x dans laquelle la variable est susceptible de recevoir toutes les valeurs imaginaires dont la partie réelle est positive. Mais la formule (8) ou (10) du n° 521 fournit un mode d'interpolation beaucoup plus général, puisqu'elle permet d'exprimer le produit $1.2.3\ldots(x-1)$ par une fonction continue de x, dans laquelle la variable peut recevoir une valeur réelle ou imaginaire quelconque. Comme ce résultat est d'une extrême importance, il n'est pas hors de propos de faire voir que les considérations les plus élémentaires conduisent immédiatement aux formules dont nous parlons, lorsque l'on cherche à interpoler la fonction numérique $1.2.3\ldots(x-1)$.

Soient donc x et m deux nombres entiers positifs, les $x-1$ fractions

$$\frac{m}{m+1}, \quad \frac{m}{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{m}{m+x-1}$$

tendront vers l'unité si m tend vers l'infini, x restant constant; il en sera donc de même du produit de ces

$x-1$ fractions, et l'on aura

$$\frac{m^{x-1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+x-1)}=\frac{1}{1+\varepsilon_m},$$

ε_m étant une quantité qui s'annule pour $m=\infty$. Multipliant les deux termes de la fraction du premier membre par $1.2\ldots m$ et chassant le dénominateur $1+\varepsilon_m$, il vient

$$1=\frac{(1.2.3\ldots m)\,m^{x-1}}{1.2.3\ldots(m+x-1)}(1+\varepsilon_m),$$

et, en multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots(x-1)$, on a

$$1.2.3\ldots(x-1)=\frac{(1.2.3\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(m+x-1)}(1+\varepsilon_m)$$

ou

$$1.2.3\ldots(x-1)=\lim\frac{(1.2.3\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(m+x-1)}\ (\text{pour } m=\infty).$$

C'est précisément la formule (10) du n° 521 dans le cas de x entier, et l'on en déduit sans difficulté la formule (8) du même numéro.

Dans les recherches qu'il a entreprises sur cet objet, Gauss a pris la formule (10) du numéro cité pour l'expression générale de la définition de $\Gamma(x)$, et M. Liouville, adoptant ensuite le même point de vue, est parvenu à plusieurs résultats intéressants [1]; on voit, par ce qui précède, combien cette marche est naturelle. D'après l'analyse que nous avons développée, le second membre de la formule (8) du n° 521 est une série qui reste convergente pour toutes les valeurs positives de x, et par conséquent, dans la même hypothèse, le second membre de la formule (10) du même numéro tend vers une limite déterminée. Mais, pour justifier la nouvelle défi-

[1] *Voir* sur cet objet une Note de M. Liouville, insérée au tome XVII, 1re série, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

nition des fonctions Γ, il est nécessaire d'établir que la même chose a lieu pour toutes les valeurs négatives ou imaginaires de x. On voit d'abord sur la formule (10) (n° 521) que $\Gamma(x)$ est infinie lorsque x est égal à zéro ou à un nombre entier négatif quelconque ; ce cas étant mis de côté, je dis que la série de la formule (8) est toujours convergente. En effet, le terme général dans lequel on suppose m supérieur au module de $x-1$ est

$$(x-1)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\dots\right)-\left[\frac{x-1}{m}-\frac{(x-1)^2}{2m^2}+\dots\right]$$

ou

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2m^2}(1+\varepsilon_m),$$

ε_m désignant une quantité qui s'annule pour $m=\infty$; il résulte de là que, à partir d'un rang suffisamment éloigné, les termes de la série décroissent comme les termes de la série $\sum\frac{1}{m^2}$; donc cette série est toujours convergente, et par suite le second membre de la formule dont nous nous occupons tend vers une limite finie et déterminée.

Démonstrations nouvelles des propriétés de la fonction $\Gamma(x)$.

526. Les propriétés de la fonction Γ établies plus haut découlent immédiatement, comme on va le voir, de la formule (10) du n° **521**.

Première propriété. — On a

$$\Gamma(x)=\frac{1.2\ldots m\, m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(x+1)=\frac{1.2\ldots m\, m^{x}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}(1+\varepsilon'_m),$$

d'où, en divisant,

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x\,\frac{m}{x+m}\,\frac{1+\varepsilon'_m}{1+\varepsilon_m},$$

et, en faisant $m=\infty$, il vient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

ce qui est la première propriété de la fonction Γ.

527. Deuxième propriété. — Si l'on multiplie entre elles les deux équations

$$\Gamma(x) = \frac{(1.2\ldots m)\,m^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}(1+\varepsilon_m),$$

$$\Gamma(1-x) = \frac{(1.2\ldots m)\,m^{-x}}{(1-x)(2-x)\ldots(m-x)}(1+\varepsilon'_m),$$

il viendra

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)(1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon'_m)}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)};$$

si l'on fait $m=\infty$, le numérateur du second membre de cette formule se réduit à 1 et le dénominateur à $\frac{1}{\pi}\sin\pi x$, à cause de la formule connue

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

(*voir* mon *Traité de Trigonométrie*, 5e édit., p. 247); on a donc

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

ou, en multipliant par x,

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

528. Troisième propriété. — La troisième propriété

de la fonction Γ n'a été démontrée au n° 519 que dans un cas particulier : nous allons l'établir ici dans toute sa généralité.

Soient x une quantité réelle ou imaginaire quelconque, n et i deux entiers positifs; si dans la formule (9) du n° 521 on remplace x par $x+\frac{i}{n}$, il viendra

$$\Gamma\left(x+\frac{i}{n}\right)=\frac{(1.2\ldots m)\,m^{x+\frac{i}{n}-1}}{\left(x+\frac{i}{n}\right)\left(x+\frac{i}{n}+1\right)\cdots\left(x+\frac{i}{n}+m-1\right)}(1+\varepsilon_m);$$

donnant ensuite à i les n valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et multipliant entre elles les égalités résultantes, on obtient

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{(1.2\ldots m)^n\,m^{nx-\frac{n+1}{2}}\,n^{mn}}{nx\,(nx+1)\ldots(nx+mn-1)}(1+\varepsilon_m),$$

ε_m désignant toujours une quantité qui s'annule pour $m=\infty$. Mais l'équation (9) du n° 521 donne aussi, en remplaçant x par nx et en écrivant mn au lieu de m,

$$\Gamma(nx)=\frac{(1.2\ldots mn)\,(mn)^{nx-1}}{nx\,(nx+1)\ldots(nx+mn-1)}(1+\varepsilon'_m),$$

et l'on a, par les deux équations précédentes,

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-nx}\,\Gamma(nx)}=\frac{(1.2\ldots m)^n\,n^{mn+1}}{(1.2\ldots mn)\,m^{\frac{n-1}{2}}}(1+\varepsilon_m),$$

ε_m désignant encore une quantité qui s'annule pour $m=\infty$. La limite du second membre de cette formule est une fonction de n indépendante de x; en la dési-

gnant par $\varphi(n)$, on aura

$$(1)\quad \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=n^{-nx}\Gamma(nx)\varphi(n),$$

la fonction $\varphi(n)$ étant définie par la formule

$$\varphi(n)=\lim\frac{(1.2\ldots m)^n\, n^{mn+1}}{(1.2\ldots mn)\, m^{\frac{n-1}{2}}}\ (\text{pour } m=\infty).$$

Si l'on fait

$$\psi(m)=\frac{1.2.3\ldots m}{m^{m+\frac{1}{2}}},$$

on pourra écrire aussi

$$\varphi(n)=\sqrt{n}\lim\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)}=\sqrt{n}\,A_n,$$

en posant, pour abréger,

$$A_n=\lim\frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)};$$

on a aussi, en changeant m en $2m$,

$$A_n=\lim\frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)},$$

puis

$$A_n=\frac{A_n^2}{A_n}=\lim\frac{[\psi(m)]^{2n}}{[\psi(mn)]^2}:\lim\frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)}$$
$$=\lim\left[\frac{\psi(m)^2}{\psi(2m)}\right]^n:\lim\frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)};$$

mais les quantités $\lim\frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}$ et $\lim\frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}$ sont égales à A_2; donc on a

$$A_n=A_2^{n-1}\quad\text{et}\quad\varphi(n)=\sqrt{n}\,A_2^{n-1};$$

quant à la constante A_2, sa valeur est

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim \frac{(1.2.3\ldots m)^2 2^{2m+\frac{1}{2}}}{(1.2.3\ldots 2m) m^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \sqrt{4 \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\frac{2m}{2m-1}};$$

d'après la formule de Wallis (n° 492), la quantité sous le radical a pour limite $4\frac{\pi}{2}$ ou 2π; on a donc

$$A_2 = \sqrt{2\pi},$$

par suite

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

et

$$(2)\quad \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx+\frac{1}{2}}\Gamma(nx).$$

Telle est l'équation qui exprime la troisième propriété de la fonction Γ; en y faisant $n=2$, il vient

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2x+1}\Gamma(2x),$$

ce qui s'accorde avec le résultat que nous avons obtenu au n° 519.

La démonstration que nous venons de présenter de la formule (2) est directe et indépendante des autres propriétés de la fonction Γ. Pour déterminer la constante A_2, on aurait pu se servir utilement de la relation $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; ainsi, en faisant $x = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ dans la formule (1), on aurait eu

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\varphi(2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}A_2, \quad \text{d'où} \quad A_2 = \sqrt{2\pi},$$

comme nous l'avons trouvé autrement. Enfin on peut obtenir très-simplement la fonction $\varphi(n)$, comme le fait Legendre, en se servant de la deuxième propriété des fonctions Γ; posons en effet $x = 0$ dans la formule (1), après avoir remplacé $\Gamma(x)$ par $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ et $\Gamma(nx)$ par $\frac{\Gamma(nx+1)}{nx}$, il viendra

$$\frac{1}{n}\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

ou, en renversant les facteurs,

$$\frac{1}{n}\varphi(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right);$$

multipliant ces deux valeurs de $\frac{1}{n}\varphi(n)$, et observant que $\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-i}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{i\pi}{n}}$, on aura

$$\varphi^2(n) = \frac{n^2\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}};$$

mais on sait que le dénominateur de cette expression est égal à $\frac{n}{2^{n-1}}$: donc

$$\varphi^2(n) = n(2\pi)^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi(n) = \sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

comme nous l'avons trouvé plus haut.

Application de la théorie des intégrales eulériennes à la détermination de quelques intégrales définies.

529. Si m désigne une quantité positive, on a (n° 516)

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-mx}x^{p-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p}.$$

Cette formule subsiste quand m est une quantité imaginaire dont la partie réelle est positive, mais cette proposition exige une démonstration. Remplaçons m par $a - t\sqrt{-1}$, et désignons par R et Φ le module et l'argument de la valeur que prend alors l'intégrale précédente, on aura

$$(2)\qquad \mathrm{R}e^{\Phi\sqrt{-1}} = \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x}x^{p-1}\,dx,$$

et il est évident que cette expression restera finie si a est une quantité positive. Posons

$$(3)\qquad t = a\tang\varphi,$$

φ étant un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$: $\mathrm{R}\cos\Phi$ et $\mathrm{R}\sin\Phi$ seront des fonctions continues de φ, respectivement égales à la partie réelle du second membre de la formule (2) et à la partie que multiplie $\sqrt{-1}$. Pour avoir les différentielles de ces fonctions, on pourra différentier sous le signe $\int$ les intégrales qui expriment leurs valeurs, et il est évident qu'on obtiendra le même résultat, d'une manière plus simple, en exécutant la différentiation sur la formule (2). On a ainsi

$$(4)\quad \mathrm{R}e^{\Phi\sqrt{-1}}\left(\frac{d\log\mathrm{R}}{d\varphi} + \sqrt{-1}\,\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) = \frac{a\sqrt{-1}}{\cos^2\varphi}\int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x}x^p\,dx;$$

mais l'intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x}x^p\,dx$$
$$= -\frac{e^{-(a-t\sqrt{-1})x}x^p}{a-t\sqrt{-1}} + \frac{p}{a-t\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x}x^{p-1}\,dx,$$

et, comme la partie intégrée s'annule aux limites 0 et ∞,

à cause de $a > 0$, on a

$$\int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^p\, dx = \frac{p\cos\varphi\, e^{\varphi\sqrt{-1}}}{a} R e^{\Phi\sqrt{-1}},$$

ce qui réduit l'équation (4) à

$$\frac{d\log R}{d\varphi} + \sqrt{-1}\,\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{p\sqrt{-1}\, e^{\varphi\sqrt{-1}}}{\cos\varphi}.$$

Égalant entre elles les parties réelles et les parties imaginaires, il vient

$$\frac{d\log R}{d\varphi} = -p\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \frac{d\Phi}{d\varphi} = p,$$

d'où

$$\log R = -p\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} = \log\cos^p\varphi + \text{const.},$$

$$\Phi = p\varphi + \text{const.}$$

Or, lorsque t ou φ est nul, on a $\Phi = 0$, $R = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$; donc

$$\Phi = p\varphi, \quad R = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi,$$

et, par conséquent, la formule (2) devient

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\, e^{p\varphi\sqrt{-1}},$$

et l'on peut écrire aussi

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^{p-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{(a-t\sqrt{-1})^p},$$

ce qui est précisément la formule (1), dans laquelle on fait $m = a - t\sqrt{-1}$. Mais, comme l'expression $(a-t\sqrt{-1})^p$ est susceptible de plusieurs valeurs quand p est fractionnaire, il faut bien remarquer que l'argument de cette puissance doit être obtenu en multipliant par p l'argument de $a - t\sqrt{-1}$ pris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

La formule (5) se décompose dans les deux suivantes

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\cos tx\,dx &= \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\cos p\varphi \\ &= \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin^p\varphi\cos p\varphi, \\ \int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin tx\,dx &= \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\varphi\sin p\varphi \\ &= \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin^p\varphi\sin p\varphi, \end{aligned}\right.$$

où les trois quantités a, t, φ sont liées entre elles par la relation (3).

530. Nous avons admis que les intégrales qui figurent dans ces formules ont des valeurs finies et déterminées ; c'est ce qui a lieu effectivement quand la quantité a est positive, comme nous l'avons supposé. Mais il n'est pas évident qu'il en soit de même lorsque a est nulle, c'est-à-dire lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, t ayant une valeur finie; dans ce cas, les formules (7) ne subsistent que si p est inférieur à l'unité. Pour le prouver, il nous suffira de considérer la deuxième des intégrales (7); ce que nous allons dire s'applique à la première, avec les changements convenables. La quantité t étant supposée positive, soit

$$(-1)^m u_m = \int_{\frac{m\pi}{t}}^{\frac{(m+1)\pi}{t}} x^{p-1}e^{-ax}\sin tx\,dx,$$

ou, en faisant la substitution $x = \dfrac{z+m\pi}{t}$,

$$u_m = \frac{1}{t^p}\int_0^\pi (z+m\pi)^{p-1}e^{-\frac{a}{t}(z+m\pi)}\sin z\,dz;$$

il est évident que l'intégrale contenue dans la deuxième

formule (7) est la somme de la série convergente

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots,$$

dans laquelle les termes sont alternativement positifs et négatifs, et décroissent indéfiniment quand on a $a > 0$. Mais, lorsque a est nul, u_m se réduit à l'expression

$$U_m = \frac{1}{t^p}\int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1}\sin z\,dz,$$

qui ne devient nulle pour $m = \infty$ que si l'on a $p < 1$. Dans cette hypothèse, la série

$$U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \ldots$$

est convergente, et je dis qu'elle a pour somme la valeur que prend, pour $a = 0$, la somme de la série précédente. En effet, si s et S désignent les sommes des deux séries, s_n et S_n les sommes formées par les n premiers termes, r_n et R_n les restes correspondants, on aura

$$S - s = (S_n - s_n) + (R_n - r_n);$$

la différence $S_n - s_n$ s'annule avec a; d'ailleurs, R_n et r_n tendent l'un et l'autre vers zéro, quand n augmente indéfiniment; donc $S - s$ s'annule pour $a = 0$.

D'après cela, les formules (7) donneront, pour $a = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\cos tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\cos\frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\sin tx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p}\sin\frac{p\pi}{2}, \end{cases}$$

pourvu que p soit compris entre 0 et 1.

Si l'on remplace $\Gamma(p)$ par sa valeur $\frac{\pi}{\Gamma(1-p)\sin p\pi}$,

dans la dernière formule, il viendra

$$\int_0^\infty x^{p-1}\sin t x\,dx = \frac{\pi}{2t^p\,\Gamma(1-p)\cos\frac{p\pi}{2}},$$

l'intégrale reste finie pour $p=0$, et l'on a

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin t x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

comme nous l'avons déjà trouvé au n° 494.

531. Les formules précédentes permettent de déterminer un grand nombre d'intégrales définies; nous allons présenter quelques exemples.

Remarquons d'abord que les équations (8) ne supposent aucunement la formule d'Euler d'où nous avons tiré la deuxième propriété des intégrales eulériennes, et il est très-facile, au contraire, d'en déduire cette formule. Effectivement, multiplions la première des équations (8) par $\frac{dt}{1+t^2}$, et intégrons ensuite de $t=0$ à $t=\infty$; l'intégration pourra être exécutée sous le signe $\int$, dans le premier membre, et l'on aura

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\cos t x}{1+t^2}\,dt\right] x^{p-1}\,dx = \Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}\int_0^\infty \frac{t^{-p}\,dt}{1+t^2};$$

mais, comme x est positif, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos t x}{1+t^2}\,dt$ est égale à $\frac{\pi}{2}e^{-x}$ (n° 496); le premier membre de la formule précédente se réduit donc à $\frac{\pi}{2}\Gamma(p)$, et l'on a

$$2\int_0^\infty \frac{t^{-p}\,dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}};$$

posant $t = x^{-\frac{1}{2}}$ et mettant $2p - 1$ au lieu de p, il vient

$$(10) \qquad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

ce qui est la formule démontrée au n° 489. Notre analyse suppose ici que p est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, mais la formule précédente subsiste pour les valeurs de p comprises entre 0 et 1, car l'intégrale du premier membre reste la même quand on change x en $\frac{1}{x}$ et p en $1-p$.

532. Soit q un nombre compris entre 0 et 1, et supposons $p > q$. Multiplions chacune des équations (7) par

$$t^{q-1}\,dt = a^q \operatorname{tang}^{q-1}\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et intégrons ensuite de $t = 0$ à $t = +\infty$ ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$; dans les premiers membres, l'intégration pourra être exécutée sous le signe $\int$ et l'on aura

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \left[\int_0^\infty t^{q-1} \cos tx\,dt\right] dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \cos p\varphi\,d\varphi,$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \left[\int_0^\infty t^{q-1} \sin tx\,dt\right] dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \sin p\varphi\,d\varphi.$$

D'après les formules (8), les intégrales relatives à t qui figurent dans les premiers membres des précédentes équations ont respectivement pour valeurs

$$\frac{\Gamma(q)}{x^q} \cos\frac{q\pi}{2}, \quad \frac{\Gamma(q)}{x^q} \sin\frac{q\pi}{2};$$

ces premiers membres sont donc

$$\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

$$\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}\int_0^\infty x^{p-q-1}e^{-ax}\,dx,$$

ou

$$\frac{\Gamma(p-q)\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}},\quad \frac{\Gamma(p-q)\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}};$$

on a donc

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\cos\frac{q\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-q-1}\varphi\sin^{q-1}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(p-q)\Gamma(q)}{\Gamma(p)}\sin\frac{q\pi}{2}. \end{cases}$$

Si l'on suppose $q=p-1$, on aura $\Gamma(p-q)=1$, $\Gamma(q)=\frac{\Gamma(p)}{p-1}$, et, par suite,

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{1}{p-1}\sin\frac{p\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\varphi\sin p\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{p-1}\cos\frac{p\pi}{2}; \end{cases}$$

dans ces formules (12), le nombre p est supposé > 1.

Dans les formules (11), q doit être < 1; mais, comme les membres de chacune d'elles sont des fonctions continues de q toujours égales entre elles, l'égalité aura lieu

encore pour $q = 1$; on a ainsi

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Ces formules supposent encore $p > 1$; il faut remarquer qu'on peut en tirer les formules (12) par le changement de φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, et inversement.

Si l'on remplace $\Gamma(q)$ par $\frac{\pi}{\sin q\pi\,\Gamma(1-q)}$ dans la seconde équation (11), et que l'on fasse ensuite $q = 0$, il viendra

$$(14)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\varphi \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2};$$

dans cette formule, p doit être positif; mais l'intégrale a une valeur constante indépendante de p.

533. D'après ce qu'on a vu au nº 529, on peut écrire

$$\frac{1}{(1 - x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-z(1-x\sqrt{-1})} dz,$$

et, en multipliant par la fonction $\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{(1 + x\sqrt{-1})^n}$, où a est supposé positif,

$$\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1} e^{-z} e^{(a+z)x\sqrt{-1}} dz}{(1 + x\sqrt{-1})^n}.$$

Multiplions encore de part et d'autre par $x^{p-1}\,dx$ et intégrons de $x = 0$ à $x = \infty$; l'intégration pourra être

exécutée sous le signe $\int$ dans le second membre, et l'on aura

$$(15)\quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{ax\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{(a+z)x\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x\sqrt{-1})^n}\right] z^{n-1}e^{-z}\,dz.$$

On a aussi

$$\frac{1}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y(1+x\sqrt{-1})}\,dy,$$

et, en multipliant par $x^{p-1}e^{(a+z)x\sqrt{-1}}\,dx$,

$$\frac{x^{p-1}e^{(a+z)x\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{dx}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}}x^{p-1}\,dy;$$

intégrant de $x=0$ à $x=\infty$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}e^{(a+z)x\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{p-1}e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}}\,dx\right] y^{n-1}e^{-y}\,dy.$$

Désignons par $\dfrac{G+H\sqrt{-1}}{\Gamma(n)}$ la valeur de chaque membre de la formule (16), la formule (15) deviendra

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(\cos ax+\sqrt{-1}\sin ax)\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty (G+H\sqrt{-1})z^{n-1}e^{-z}\,dz;$$

égalant entre elles les parties affectées du facteur $\sqrt{-1}$, et faisant ensuite $p=0$, on aura

$$(17)\quad \int_0^\infty \frac{\frac{\sin ax}{x}}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty H z^{n-1}e^{-z}\,dz.$$

La valeur de H est donnée par la formule (16). On a, pour le cas de $p=0$,

$$H = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx\right] y^{n-1}e^{-y}\,dy;$$

or le facteur entre crochets $\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$ (n° 495), selon que y est inférieur ou supérieur à $a+z$; donc on a

$$\mathrm{H} = \frac{\pi}{2}\left[\int_0^{a+z} y^{n-1}e^{-y}\,dy - \int_{a+z}^{\infty} y^{n-1}e^{-y}\,dy\right],$$

et, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{d\mathrm{H}}{da} = \pi(a+z)^{n-1}e^{-(a+z)}.$$

En différentiant aussi l'équation (17) par rapport à a, on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty \frac{d\mathrm{H}}{da} z^{n-1}e^{-z}\,dz,$$

et l'on obtient enfin la formule suivante, que nous voulions établir :

$$(18)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1}(a+z)^{n-1}e^{-(a+2z)}\,dz,$$

où n désigne un nombre positif quelconque. Lorsque n est un entier, on a

$$(19)\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi e^{-a}}{2^{2n-1}\Gamma(n)}\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{\Gamma(2n-1-i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i)}(2a)^i.$$

Pour $n=1$, on retrouve la formule

$$\int_0 \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

déjà obtenue au n° 496. Pour $n=2$, on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}(1+a)e^{-a}.$$

534. La formule (18) va nous conduire à d'autres intégrales définies qui ont quelque importance.

Reprenons la première formule (7), savoir

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx \, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p\varphi,$$

où l'on a

$$t = a \operatorname{tang} \varphi;$$

multiplions-la par

$$\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n},$$

et intégrons ensuite de $t=0$ à $t=\infty$ ou de $\varphi=0$ à $\varphi=\frac{\pi}{2}$; en effectuant l'intégration sous le signe $\int$, dans le premier membre, on aura

$$(20)\quad \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\cos tx\,dt}{(1+t^2)^n}\right] x^{p-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi\,d\varphi}{(1+a^2 \operatorname{tang}^2\varphi)^n}.$$

Mais, d'après la formule (18), l'intégrale relative à t qui figure en facteur sous le signe $\int$, dans le premier membre, a pour valeur

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty z^{n-1}(x+z)^{n-1} e^{-(x+2z)}\,dz,$$

ou en mettant xy au lieu de z, $x\,dy$ au lieu de dz,

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty y^{n-1}(1+y)^{n-1} e^{-x(1+2y)} x^{2n-1}\,dy.$$

Si donc on multiplie par $x^{p-1}e^{-ax}dx$, et qu'on intègre de 0 à ∞, on obtiendra un résultat dont la valeur sera celle de l'intégrale contenue dans le premier membre de

la formule (20); on a, par conséquent,

$$\frac{\pi}{\Gamma(n)^2}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{2n+p-2}e^{-(a+1+2y)x}\,dx\right]y^{n-1}(1+y)^{n-1}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi}{(1+a^2\tang^2\varphi)^n};$$

dans le premier membre, l'intégrale relative à x a pour valeur

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2y)^{2n+p-1}};$$

donc

$$(21)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-2}\cos p\varphi\,d\varphi}{(1+a^2\tang^2\varphi)^n} \\ \displaystyle\qquad = \pi a^{p-1}\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p)\,\Gamma^2(n)}\int_0^\infty \frac{y^{n-1}(1+y)^{n-1}\,dy}{(a+1+2y)^{2n+p-1}}. \end{cases}$$

Lorsque $a=1$, l'intégrale qui figure dans le second membre se réduit à

$$\frac{1}{2^{2n+p-1}}\int_0^\infty \frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^{n+p}} = \frac{1}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)};$$

on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p+2n-2}\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}}\,\frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(n+p)},$$

ou, en faisant $p+2n-2=q$,

$$(22)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^q\varphi\cos p\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}}\,\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}.$$

Cette formule (22) a été démontrée pour la première fois

par Cauchy. Dans le cas de $q = p$, elle se réduit à une formule obtenue par Poisson, savoir :

$$(23)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

Si l'on fait $n = 1$ dans la formule (21), l'intégrale du second membre se réduit à

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{(a+1+2y)^{p+1}} = \frac{1}{2p(a+1)^p};$$

on a donc

$$(24)\qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos^p\varphi \cos p\varphi \, d\varphi}{\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

ce qui se réduit à la formule (23), quand on suppose $n = 1$.

Sur l'évaluation approchée du produit 1.2.3...x, *quand* x *est un grand nombre.*

535. Le logarithme du produit des x premiers nombres entiers peut être exprimé par une série qui procède suivant les puissances entières et négatives de x. Cette série célèbre est celle de Stirling, et elle a fait l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels je dois spécialement mentionner Cauchy, Binet, M. Malmsten et M. Liouville. Mais, parmi les démonstrations diverses qu'on possède de cette formule, je ne crois pas qu'il y en ait de plus simple que celle que j'ai présentée, il y a quelques années, à l'Académie des Sciences, et que j'ai reproduite en partie dans la quatrième édition de mon *Cours d'Algèbre supérieure*. J'ai montré que la formule connue de Wallis suffit pour éta-

blir complétement celle de Stirling, et la déduction est si facile, que la deuxième formule peut en quelque sorte être regardée comme une transformée de la première. Ces développements se rattachent essentiellement à la théorie des intégrales eulériennes, et je crois utile de les présenter ici.

536. La formule de Wallis est (n° 492)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2x-2}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{2x-1}\cdot\frac{2x}{2x-1}\quad(\text{pour } x=\infty),$$

et elle prend la forme très-simple

$$\frac{[\varphi(x)]^4}{[\varphi(2x)]^2}=1\quad(\text{pour } x=\infty),$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$(1)\qquad \frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)}=1\quad\text{pour } x=\infty$$

si l'on désigne par $\varphi(x)$ soit l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}},$$

soit le produit de cette même expression par une exponentielle de la forme a^x, a étant une constante quelconque. La formule (1) aura donc lieu si, désignant par e la base des logarithmes népériens, on pose

$$(2)\qquad \varphi(x)=\frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}}.$$

On tire de la formule (2)

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}=e^{-1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

ou

$$(4)\qquad \log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=-1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

la caractéristique log exprimant des logarithmes népériens. Or on a, x étant > 1,

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{nx^n}+\ldots,$$

d'où

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$=1+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\ldots+\frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n}+\ldots;$$

donc

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}\\&=\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\frac{3}{40x^4}-\ldots+\frac{(n-1)}{2n(n+1)}\frac{(-1)^n}{x^n}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Dans cette série, les termes sont alternativement positifs et négatifs; en outre, la valeur absolue du rapport du terme de rang n au précédent est

$$\frac{n^2}{n^2+n-2}\,\frac{1}{x};$$

ce rapport est égal à $\frac{1}{x}$ pour $n=2$, mais il est inférieur à $\frac{1}{x}$ pour toutes les valeurs de n supérieures à 2; donc, lors même que x se réduirait à 1, les valeurs absolues des termes de la série (5) décroissent à partir du deuxième terme. Il résulte évidemment de là que l'on a

$$\log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}<\frac{1}{12x^2}$$

ou

$$(6)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}<e^{\frac{1}{12x^2}}.$$

Mais on peut assigner une limite de $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$ inférieure à la précédente, et, comme elle nous sera utile plus loin, il convient de l'indiquer ici.

Si l'on multiplie la formule (5) par $x+1$, il viendra

$$(x+1)\log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{120x^3} + \ldots$$
$$+ \frac{(n-3)}{2(n-1)n(n+1)}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots;$$

dans cette série, le terme en $\frac{1}{x^2}$ manque; les autres termes sont alternativement positifs et négatifs, et le rapport du terme en $\frac{1}{x^n}$ au terme en $\frac{1}{x^{n-1}}$ a pour valeur absolue

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)+2(n-4)}\frac{1}{x};$$

ce rapport est égal à $\frac{1}{x}$ pour $n=4$, mais il est inférieur à $\frac{1}{x}$ pour $n>4$. Donc les termes diminuent à partir du deuxième, lors même que x serait égal à 1, et l'on a

$$(x+1)\log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x},$$

ou

$$(7)\qquad \log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x(x+1)}.$$

La formule (6) montre que l'on a

$$(8)\qquad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta_0}{x^2}},$$

θ_0 étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{12}$; on aura aussi, en changeant x en $x+1$, $x+2$, ..., $2x-1$, et en dé-

signant par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{x-1}$ des nombres compris entre o et $\frac{1}{12}$,

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(x+1)^2}}, \\ \dfrac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(x+2)^2}}, \quad \ldots, \\ \dfrac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}}. \end{cases}$$

Multiplions entre elles les égalités (8) et (9); comme la somme des x fractions

$$\frac{\theta_0}{x^2} + \frac{\theta_1}{(x+1)^2} + \frac{\theta_2}{(x+2)^2} + \ldots + \frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}$$

est moindre que $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x^2} \times x$ ou que $\frac{1}{12x}$, on aura

$$(10)\quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}},$$

θ étant un nombre compris entre o et $\frac{1}{12}$; et par suite

$$(11)\quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1 \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Si maintenant on divise la formule (1) par la formule (11), il viendra

$$(12)\quad \varphi(x) = 1 \quad (\text{pour } x = \infty),$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (2),

$$(13)\quad 1.2.3\ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_x),$$

ε_x désignant une quantité positive qui s'annule pour $x = \infty$, et dont nous allons faire connaître une limite supérieure.

537. On a

$$(14)\qquad \Gamma(x+1) = 1.2.3\ldots x,$$

et je dis qu'on peut obtenir, par ce qui précède, une expression exacte de la fonction $\Gamma(x+1)$, ou, ce qui revient au même, une expression du logarithme népérien $\log\Gamma(x+1)$ lorsque x est entier. On a d'abord, par la formule (2),

$$(15)\qquad \log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \log\varphi(x),$$

et l'on a ensuite identiquement

$$\log\varphi(x) = \log\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + \log\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \ldots$$
$$+ \log\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + \log\varphi(x+m+1);$$

mais, si l'entier m croît indéfiniment, $\varphi(x+m+1)$ tend vers l'unité, d'après la formule (12), et son logarithme tend vers zéro; on a donc

$$(16)\qquad \log\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\log\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)},$$

ou, d'après la formule (4),

$$(17)\qquad \log\varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right],$$

et l'on aura en conséquence

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \log\Gamma(x+1) = {} & \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x \\ & + \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule (18), qui a été rencontrée par Gudermann, se déduit bien facilement, comme on le voit, de la simple formule de Wallis.

538. Comme la quantité $\log\varphi(x)$ est positive, la formule (15) nous donne d'abord

$$(19)\qquad \log\Gamma(x+1) > \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x.$$

Ensuite nous aurons, par la formule (16), à cause de l'inégalité (7),

$$\log\varphi(x) < \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{12(x+m)(x+m+1)};$$

or la fraction $\dfrac{1}{(x+m)(x+m+1)}$ se décompose en

$$\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+m+1};$$

donc on peut écrire

$$12\log\varphi(x) < \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \ldots.$$

La série contenue dans le second membre de cette formule a pour somme $\dfrac{1}{x}$, et l'on a en conséquence

$$\log\varphi(x) < \frac{1}{12x},$$

puis

$$(20)\qquad \log\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \frac{1}{12x}.$$

Les formules (19) et (20) nous donnent les deux limites

que nous voulions trouver. En revenant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$(21)\qquad \begin{cases} 1.2.3\ldots x > \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}}, \\ 1.2.3\ldots x < \sqrt{2\pi}\, e^{-x+\frac{1}{12x}}\, x^{x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Extension des formules précédentes au cas où x n'est pas un nombre entier positif.

539. L'analyse précédente suppose que x est un entier positif; mais le second membre de l'équation (18) du n° 537 est une fonction dans laquelle x est susceptible de recevoir une valeur quelconque; en exceptant le cas où x est un entier négatif, la série qui figure dans la formule citée est toujours convergente, car ses termes, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, décroissent comme ceux de la série $\sum \frac{1}{m^2}$. Cela posé, je dis que la formule dont il s'agit subsiste, quel que soit x, en se conformant à la définition générale que nous avons donnée de la fonction Γ. Cette définition est exprimée par la formule (8) du n° 521, qui donne, en remplaçant x par $x+1$ et en écrivant, sous le signe $\sum$, $m+1$ au lieu de m,

$$\log\Gamma(x+1) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[x \log\left(1+\frac{1}{m+1}\right) - \log\left(1+\frac{x}{m+1}\right)\right].$$

Pour prouver l'identité des valeurs de $\log\Gamma(x+1)$, données par la précédente équation et par la formule (18) du n° 537, il suffit de les différentier deux fois; on tire de l'une et de l'autre

$$\frac{d^2 \log\Gamma(x+1)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m+1)^2};$$

les seconds membres des deux formules ont donc leurs secondes dérivées égales; en conséquence, ils ne peuvent différer que par une fonction linéaire de x; mais, comme ils sont égaux par les valeurs entières et positives de x, il s'ensuit que leur différence se réduit nécessairement à zéro.

Formule de Stirling.

540. Il est facile d'exprimer la fonction $\log\varphi(x)$ par une intégrale définie. On trouve, en différentiant deux fois de suite la formule (17) du n° 537,

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x+m}\right) - \frac{1}{x+m}\right],$$

$$\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2}.$$

Or on a, pour toute valeur positive de z,

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\,d\alpha, \qquad \frac{1}{z^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\,\alpha\,d\alpha;$$

si donc la variable x reste positive, on aura

$$\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-m\alpha}\,\alpha\,d\alpha;$$

et, comme la quantité $\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-m\alpha}$ est égale à $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, on a

$$\frac{d^2\log\varphi(x)}{dx^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\left(\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} - \frac{\alpha}{2} - 1\right)d\alpha;$$

intégrant deux fois et observant que les fonctions $\log\varphi(x)$

et $\frac{d\log\varphi(x)}{dx}$ s'annulent pour $x=\infty$, il vient

$$(1)\qquad \log\varphi(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)e^{-\alpha x}\,d\alpha.$$

En portant cette valeur de $\log\varphi(x)$ dans l'équation (15) du n° 537, on aurait une expression de $\log\Gamma(x+1)$ qui a été donnée par Cauchy.

541. De là on peut tirer la formule de Stirling, mais il est nécessaire pour cet objet de transformer la formule (1); l'équation

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{\sin\pi x}$$

donne

$$\log\Gamma(1+x)+\log\Gamma(1-x)=\log\pi x-\log\sin\pi x,$$

et, en différentiant,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx}+\frac{d\log\Gamma(1-x)}{dx}&=\frac{1}{x}-\pi\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}\\ &=\frac{1}{x}-\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{\pi x\sqrt{-1}}+e^{-\pi x\sqrt{-1}}}{e^{\pi x\sqrt{-1}}-e^{-\pi x\sqrt{-1}}};\end{aligned}\right.$$

d'ailleurs on a, par la formule (18) du n° 537,

$$\frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx}=-C+\left(1-\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)+\ldots,$$

et, en changeant x en $-x$,

$$-\frac{d\log\Gamma(1-x)}{dx}=-C+\left(1-\frac{1}{1-x}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2-x}\right)+\ldots.$$

Si donc on porte ces valeurs dans l'équation (2), on aura

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{2^2-x^2}+\frac{2x}{3^2-x^2}+\ldots=\frac{1}{x}-\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{\pi x\sqrt{-1}}+e^{-\pi x\sqrt{-1}}}{e^{\pi x\sqrt{-1}}-e^{-\pi x\sqrt{-1}}}.$$

Cette formule n'est autre chose que celle qui donne la valeur de $\cot \pi x$ en une série indéfinie de fractions simples, et que nous avons démontrée au n° 491 ; nous aurions donc pu la prendre ici pour point de départ ; mais, outre qu'elle est établie par ce qui précède pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de x, il n'était pas sans intérêt de la rattacher aux formules que nous avons données dans notre théorie des fonctions Γ.

Si l'on pose $x = \frac{\alpha\sqrt{-1}}{2\pi}$, la formule précédente deviendra

$$(3) \qquad \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2},$$

et l'on aura, par la division,

$$\frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2} = \frac{1}{(2m\pi)^2} - \frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4} + \ldots \pm \frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} \mp \Theta_m \frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

Θ_m désignant, pour abréger, la quantité $\frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2 + \alpha^2}$ dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Donnons à m les valeurs 1, 2, 3, ... jusqu'à l'infini, ajoutons ensuite tous les résultats, et remarquons que, si l'on pose

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \Theta_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}} = \Theta \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

Θ sera nécessairement compris entre 0 et 1 ; on aura, à cause de la formule (3),

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^2} - 2\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^4} + \ldots$$

$$\pm 2\alpha^{2n-2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} \mp 2\Theta\alpha^{2n} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

et, si l'on fait

$$(4)\quad \frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\right),$$

il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2+\ldots\pm\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n-2}\\ &\quad\mp\Theta\frac{B_{n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\alpha^{2n},\end{aligned}\right.$$

Θ étant, nous le répétons, une quantité comprise entre o et 1.

Ce résultat remarquable est dû à Cauchy; la fonction de α, qui constitue le premier membre de la formule (5), ne devient infinie que pour les valeurs de α comprises dans la formule $\alpha = 2k\pi\sqrt{-1}$, k étant un entier positif ou négatif, mais différent de zéro ; il en résulte que cette fonction est développable en série convergente, par la formule de Maclaurin, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de α dont le module est inférieur à 2π, en sorte que l'on a, dans cette hypothèse,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2+\ldots\pm\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n-2}\mp\ldots;\end{aligned}\right.$$

la formule (5) subsiste pour toutes les *réelles* de α, et elle fait connaître l'expression du reste de la série (6), lorsque l'on s'arrête au terme du rang n.

542. Les coefficients B_1, B_2, B_3, ..., qui figurent dans les formules (5) et (6), sont connus sous le nom de *nom-*

bres de Bernoulli; l'équation (4) fait connaître l'expression générale du $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, mais cette expression contient la transcendante π et en outre la somme d'une série indéfinie. Il est facile de calculer successivement les nombres B qui sont tous rationnels; à cet effet, considérons l'équation (6), où nous supposerons $\alpha < 2\pi$ pour la convergence de la série; si l'on remplace $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ par la valeur égale $\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$, il viendra

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right]$$
$$=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n-2}+\ldots,$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)$$
$$=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}\left[1+\frac{B_1}{1.2}\alpha^2-\frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n}+\ldots\right];$$

remplaçant les exponentielles par leurs valeurs en séries, on a

$$\frac{1}{2}\left(2+\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots+\frac{\alpha^{2n}}{1.2\ldots 2n}+\ldots\right)$$
$$=\left(1+\frac{\alpha^2}{1.2.3}+\ldots+\frac{\alpha^{2n}}{1.2\ldots(2n+1)}+\ldots\right)$$
$$\times\left(1+\frac{B_1}{1.2}\alpha^2-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n}+\ldots\right);$$

les deux facteurs du second membre sont des séries convergentes, et la deuxième ne cesse pas d'être convergente quand on réduit ses termes à leur valeur absolue, car la série (6) reste convergente quand on remplace α

par $\alpha\sqrt{-1}$, puisque la seule condition de convergence est que le module de α soit inférieur à 2π; il s'ensuit que, si l'on effectue le produit des deux séries qui figurent dans le second membre de l'équation précédente, et qu'on ordonne le produit par rapport aux puissances de α, on reproduira identiquement la série contenue dans le premier membre. En procédant ainsi et en égalant de part et d'autre les coefficients de α^{2n}, on trouve

$$0 = \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1.2\ldots 2n} + \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)}\,\frac{B_1}{1.2}$$
$$- \frac{1}{1.2\ldots(2n-3)}\,\frac{B_2}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{(-1)^{\mu-1}}{1.2\ldots(2n-2\mu+1)}\,\frac{B_\mu}{1.2\ldots 2\mu}$$
$$+ \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{1}\,\frac{B_n}{1.2\ldots 2n},$$

équation qui déterminera B_n si l'on connaît $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$; en y faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + B_1 = 0,$$
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}B_1 - B_2 = 0,$$
$$\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{6}{2}B_1 - \frac{6.5.4}{2.3.4}B_2 + B_3 = 0,$$
$$\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2}B_1 - \frac{8.7.6}{2.3.4}B_2 + \frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}B_3 - B_4 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on tire

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},$$
$$B_5 = \frac{5}{66},\quad B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6},\quad \ldots.$$

La suite des nombres de Bernoulli est, comme on le voit, d'abord décroissante, mais, à partir de B_3, elle devient indéfiniment croissante.

543. Revenons maintenant à la formule (1), qui donne l'expression de $\log\varphi(x)$. Cette formule se réduit, en faisant usage de l'équation (5), à

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \log\varphi(x) &= \frac{B_1}{1.2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,d\alpha - \frac{B_2}{1.2.3.4}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^2\,d\alpha + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2n-2}\,d\alpha \\ &+ (-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots(2n+2)}\int_0^\infty \Theta e^{-\alpha x}\alpha^{2n}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Or on a

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu} = \frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{x^\mu}$$

pour toute valeur de l'entier μ; en outre, comme la quantité Θ reste comprise entre 0 et 1, l'intégrale $\int_0^\infty \Theta e^{-\alpha x}\alpha^{2n}\,d\alpha$ est positive et inférieure à $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2n}\,d\alpha$, c'est-à-dire inférieure à $\dfrac{1.2.3\ldots 2n}{x^{2n+1}}$; on pourra donc la représenter par $\theta\dfrac{1.2.3\ldots 2n}{x^{2n+1}}$, en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1. D'après cela, la valeur précédente de $\log\varphi(x)$ devient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \log\varphi(x) &= \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} \\ &+ (-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}, \end{aligned}\right.$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (15) du n° 537,

on aura, pour toute valeur positive de x,

$$\left\{\begin{aligned}\log\Gamma(x+1) &= \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}},\end{aligned}\right.$$

la quantité θ qui multiplie le dernier terme étant, nous devons le répéter, toujours comprise entre 0 et 1.

Si l'on prolonge à l'infini la série du second membre, on a la formule de Stirling, savoir :

$$(10)\left\{\begin{aligned}\log\Gamma(x+1) &= \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}} + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que cette série est divergente, quelque grande que soit la valeur attribuée à x; en effet, la valeur absolue du terme général $(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}}$ est égale, d'après la formule (4), au produit des deux quantités

$$\frac{1}{2\pi x}\,\frac{2}{2\pi x}\,\frac{3}{2\pi x}\cdots\frac{2n-2}{2\pi x} \quad\text{et}\quad \frac{1}{2\pi^2 x}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right).$$

La seconde de ces expressions tend vers la limite $\frac{1}{2\pi^2 x}$ quand n augmente indéfiniment; la première expression, au contraire, augmente au delà de toute limite, car elle est un produit dont les facteurs inférieurs à 1 sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux qui sont supérieurs à 1, et même à telle quantité que l'on voudra, peut devenir plus grand que tout nombre donné. Il résulte de là que les termes de la série (10) croissent, à partir d'un certain rang, au delà de toute limite, et en conséquence cette série est divergente.

544. Mais il est très-remarquable que la série de Stirling, malgré sa divergence, fournisse un procédé très-exact et très-commode pour calculer $\log\Gamma(x+1)$, et l'approximation que l'on peut obtenir par cette voie est d'autant plus grande que x est plus considérable. Effectivement, si x est supérieur à 1, les termes multipliés par les nombres B dans la formule de Stirling vont d'abord en décroissant, et l'on voit par la formule (9) que l'erreur commise en faisant usage de la formule (10) est toujours moindre en valeur absolue que le premier des termes *négligés*. On aura donc la plus grande approximation possible en s'arrêtant au terme qui précède le terme *minimum* et ce terme minimum lui-même donnera une limite supérieure de l'erreur que l'on aura commise. Par exemple, si l'on néglige complétement, dans la formule (10), les termes multipliés par les coefficients B, l'erreur commise sera positive et inférieure à $\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}$ ou à $\frac{1}{12x}$, à cause de $B_1 = \frac{1}{6}$; on aura donc

$$(11)\quad \begin{cases} \log\Gamma(x+1) > \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x, \\ \log\Gamma(x+1) < \frac{1}{2}\log 2\pi - x + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x + \frac{1}{12x}, \end{cases}$$

ou, en revenant des logarithmes aux nombres,

$$(12)\quad \begin{cases} \Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}, \\ \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{12x}}, \end{cases}$$

comme nous l'avons déjà trouvé au n° 538.

En partant de ces formules, on peut obtenir deux limites du nombre de Bernoulli B_n, dont l'une nous sera utile dans ce qui va suivre. En posant, pour abréger,

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots,$$

on a, par la formule (4),

$$B_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n}, \quad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \cdot \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \quad \frac{B_n}{B_1} = \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \frac{S_{2n}}{S_2};$$

mais, comme $S_{2\mu}$ décroît quand μ augmente, on a

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \quad \frac{B_n}{B_1} < \frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

ou, à cause de $B_1 = \frac{1}{6}$,

$$(13) \qquad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2},$$

$$(14) \qquad B_n < \frac{1}{12} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

La formule (14) donne une limite supérieure de B_n; on aura une limite inférieure du même nombre en remplaçant S_{2n} par 1 dans son expression exacte; il vient ainsi

$$(15) \qquad B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Si l'on remplace $\Gamma(2n+1)$ par sa limite supérieure, tirée des inégalités (12), dans la formule (14), et par sa limite inférieure, dans la formule (15), on aura

$$(16) \qquad \begin{cases} B_n < \dfrac{1}{12} \dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n} e^{\frac{1}{24n}}, \\ B_n > 2 \dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+\frac{1}{2}}} e^{-2n}; \end{cases}$$

le rapport de ces deux limites de B_n est $\frac{\pi^2}{6} e^{\frac{1}{24n}}$.

545. Les formules que nous venons d'établir ont été données par Cauchy; elles permettent de déterminer facilement l'approximation avec laquelle on peut calculer $\log\Gamma(x+1)$ par la formule de Stirling.

Désignons par u_n la valeur absolue du terme de cette série qui dépend du coefficient B_n, on aura

$$u_n = \frac{B_n}{(2n-1)2n}\,\frac{1}{x^{2n-1}},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n}\,\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{x^2};$$

la seconde de ces deux formules donne, à cause de l'inégalité (13),

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2},$$

et l'on aura, à plus forte raison,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 x^2} \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3x}\right)^2.$$

Donc u_{n+1} sera inférieur à u_n tant qu'on aura $n < 3x$ ou $n = 3x$. Ainsi, quand x est plus grand que 1, la série de Stirling est décroissante dans les premiers termes, et, si x est un nombre entier, ce décroissement aura certainement lieu jusqu'au terme de rang $3x$, lequel sera lui-même plus petit que le terme suivant.

Cela posé, désignons par ε_n la valeur absolue de l'erreur commise en s'arrêtant, dans la série de Stirling, au terme multiplié par B_n; on aura, comme on l'a vu,

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{x^{2n+1}},$$

et, à plus forte raison, à cause de l'inégalité (13),

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 x^{2n+1}},$$

et enfin, à cause de la première des inégalités (16),

(17) $$\varepsilon_n < \frac{1}{6}\frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}{x}\left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}},$$

limite qu'il est facile de calculer par logarithmes.

Nous avons vu que, si x est entier, le décroissement des termes de la série a toujours lieu, jusqu'à ce que n soit égal à $3x$; si l'on fait $n = 3x$, la formule (17) devient

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

et, parce que x est au moins égal à 1, on aura, à plus forte raison,

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x};$$

mais on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72}} = 0,393409\ldots;$$

donc

$$\varepsilon_{3x} < 0,393409\ldots\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{e}\right)^{6x},$$

ou, en prenant les logarithmes vulgaires des deux membres,

(18) $$\log\varepsilon_{3x} < \bar{1},594844 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{x} + (\bar{3},3942331)x.$$

Pour $x = 1$, on a déjà

$$\log\varepsilon_3 < \bar{4},9890775,$$

et par conséquent $\varepsilon_3 < \frac{1}{1000}$; pour $x = 10$, on a

$$\log\varepsilon_{30} < \overline{27},047175,$$

et l'on voit que, dans cet exemple de $x = 10$, on peut

pousser le calcul de $\log\Gamma(x+1)$ jusqu'à la vingt-sixième décimale, en s'arrêtant au terme multiplié par B_{30}.

La formule (17) montre, comme nous l'avions annoncé, que la formule de Stirling permet de calculer généralement $\log\Gamma(x+1)$ avec une approximation qui sera d'autant plus grande que x sera plus considérable.

546. On obtient des formules utiles en différentiant une ou plusieurs fois la formule de Stirling; mais, comme cette dernière renferme une série divergente, il en sera de même de celles que nous avons en vue. Cependant celles-ci peuvent servir, comme la formule de Stirling, pour le calcul numérique; c'est ce que nous allons établir. A cet effet, remarquons que la quantité Θ, qui figure sous le signe $\int$ dans le dernier terme du second membre de la formule (7), est indépendante de x; on aura donc, en différentiant μ fois cette équation,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\log\varphi(x)}{dx^{\mu}} = {} & \frac{B_1}{1.2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\alpha^{\mu}\,d\alpha - \ldots \\
& + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\alpha^{\mu+2n-2}\,d\alpha \\
& + (-1)^{n}\frac{B_{n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\int_0^{\infty}\Theta e^{-\alpha x}\alpha^{\mu+2n}\,d\alpha;
\end{aligned}
$$

puis, en procédant comme nous l'avons fait, pour déduire la formule (8) de (7), on trouvera

$$
(19)\quad
\left\{
\begin{aligned}
(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\log\varphi(x)}{dx^{\mu}} = {} & B_1\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{x^{\mu+1}} - B_2\frac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(5)}\frac{1}{x^{\mu+3}} - \ldots \\
& + (-1)^{n-1}B_n\frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\frac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\
& + (-1)^{n}\theta B_n\frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\frac{1}{x^{\mu+2n+1}},
\end{aligned}
\right.
$$

θ désignant comme Θ une quantité comprise entre o et 1. Quand x est suffisamment grand, les termes du second membre vont d'abord en décroissant, comme dans la série de Stirling, et l'erreur commise quand on s'arrête à un terme quelconque est moindre que le terme suivant et de même signe que ce terme; dans le cas particulier de $\mu = 1$, on a

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\log\varphi(x)}{dx} &= -\frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4}\frac{1}{x^4} - \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1}\theta\frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{x^{2n+2}}. \end{aligned}\right.$$

On tire de la formule (15) du n° 537, par la différentiation,

$$\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx} = \log x + \frac{1}{2x} + \frac{d\log\varphi(x)}{dx},$$

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu \log\Gamma(x+1)}{dx^\mu} = \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + (-1)^\mu \frac{d^\mu \log\varphi(x)}{dx^\mu};$$

on aura donc

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx} &= \log x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2}\frac{1}{x^2} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_n}{2n}\frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1}\theta\frac{B_{n+1}}{2n+2}\frac{1}{x^{2n+2}}, \end{aligned}\right.$$

et, pour $\mu > 1$,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^\mu \frac{d^\mu \log\Gamma(x+1)}{dx^\mu} &= \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + B_1\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{x^{\mu+1}} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} B_n \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\frac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\ &\quad + (-1)^n \theta B_n \frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\frac{1}{x^{\mu+2n+1}}, \end{aligned}\right.$$

θ désignant, dans toutes ces formules, une quantité comprise entre o et 1.

547. Les résultats que nous venons d'obtenir fournissent un moyen très-simple de calculer la constante d'Euler, constante que nous avons désignée par C. Nous prendrons pour point de départ la formule (2) du n° 523, qui suppose x entier et qui devient, en changeant x en $x+1$,

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} - \frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx};$$

remplaçant $\frac{d\log\Gamma(x+1)}{dx}$ par sa valeur tirée de la formule (21), il vient

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_2}{4x^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2nx^{2n}} + \ldots,$$

et l'erreur commise en s'arrêtant au terme qui dépend de B_n sera moindre, en valeur absolue, que $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}$.
En remplaçant les nombres B par leurs valeurs, dans la formule précédente, on trouve

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} C = {} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} \\ & - \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6} - \frac{1}{240x^8} + \frac{1}{132x^{10}} - \frac{691}{32760x^{12}} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et, si l'on s'arrête au dernier des termes écrits, l'erreur commise sera moindre que $\frac{1}{12x^{14}}$. Ainsi, en faisant $x=10$, on a la formule

$$\begin{aligned} C = {} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \\ & - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{0{,}01}{12} - \frac{0{,}0001}{120} + \frac{0{,}000\,001}{252} \\ & - \frac{0{,}000\,000\,01}{240} + \frac{0{,}000\,000\,0001}{132} - \frac{0{,}000\,000\,000\,691}{32760}, \end{aligned}$$

qui donnera la valeur de C avec quinze décimales exactes ; en prenant

$$\log 10 = 2,302\,585\,092\,994\,045\,68,$$

on trouve sans difficulté la valeur

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532,$$

déjà donnée au n° 522.

548. Nous avons fait connaître au n° 542 une formule qui permet de calculer successivement les nombres B_1, B_2, B_3, ...; on peut obtenir généralement pour B_n une expression débarrassée de transcendantes, mais qui est un peu compliquée. Nous croyons utile toutefois de la faire connaître en terminant ce Chapitre.

Les nombres de Bernoulli sont définis par la formule (6), qui peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1.2}\alpha - \frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha^3 + \ldots \\ + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\alpha^{2n-1} + \ldots.\end{aligned}$$

Or on a identiquement

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{2}{e^{2z} - 1};$$

si donc on remplace les fractions du second membre par leurs valeurs en séries, en faisant usage de la formule précédente appliquée aux cas de $\alpha = z$ et de $\alpha = 2z$, il viendra

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{2} - (2^2 - 1)\frac{B_1}{1.2}z + (2^4 - 1)\frac{B_2}{1.2.3.4}z^3 - \ldots \\ + (-1)^n(2^{2n} - 1)\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}z^{2n-1} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

série convergente pour toutes les valeurs de z dont le mo-

dule est inférieur à π ; on a donc, par la formule de Maclaurin,

$$(25)\qquad (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_n = \frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} \quad (\text{pour } z=0).$$

La première dérivée de la fonction $\frac{1}{e^z+1}$ est $\frac{-e^z}{(e^z+1)^2}$ et il est aisé de voir que l'on aura généralement

$$\frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} = \frac{A_1 e^{(2n-1)z} + A_2 e^{(2n-2)z} + \ldots + A_{2n-1} e^z}{(e^z+1)^{2n}},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ étant des coefficients indépendants de z ; il y a plus : l'équation (24) montre que la première dérivée de la fonction $\frac{1}{e^z+1}$ est une fonction paire de z, qui ne change pas quand on y change z en $-z$; il s'ensuit que la même chose a lieu pour toutes les dérivées d'ordres impairs. Mais, par ce changement de z en $-z$, l'expression précédente devient

$$\frac{A_{2n-1} e^{(2n-1)z} + A_{2n-2} e^{(2n-2)z} + \ldots + A_1 e^z}{(e^z+1)^{2n}};$$

il faut donc que l'on ait généralement $A_{2n-i} = A_i$, et, par suite,

$$(26)\qquad \frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} = \frac{A_1[e^{(2n-1)z}+e^z] + \ldots + A_{n-1}[e^{(n+1)z}+e^{(n-1)z}] + A_n e}{(e^z+1)^{2n}}$$

Cela posé, on a

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}$$
$$= e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z} - \ldots + (-1)^{\mu-1} e^{-\mu z} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{d^{2n-1}\dfrac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} = -1^{2n-1}e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} - 3^{2n-1}e^{-3z} - \dots$$
$$+ (-1)^{\mu}\mu^{2n-1}e^{-\mu z} + \dots;$$

mais on a aussi

$$(e^z+1)^{2n} = e^{2nz} + \frac{2n}{1}e^{(2n-1)z} + \dots$$
$$+ \frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1.2\dots i}e^{(2n-i)z} + \dots$$
$$+ 2ne^z + 1,$$

et, en multipliant entre elles les deux équations précédentes, on aura, à cause de la formule (26),

$$A_1[e^{(2n-1)z} + e^z] + \dots + A_{n-1}[e^{(n+1)z} + e^{(n-1)z}] + A_n e^{nz}$$
$$= [-1^{2n-1}e^{-z} + 2^{2n-1}e^{-2z} - \dots + (-1)^{\mu}\mu^{2n-1}e^{-\mu z} + \dots]$$
$$\times\left[e^{2nz} + \dots + \frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1.2\dots i}e^{(2n-i)z} + \dots + 2ne^z + 1\right].$$

Le premier membre de cette formule est une fonction entière de e^z; par conséquent, si l'on effectue le produit indiqué dans le second membre, il ne restera que des termes contenant des puissances positives de e^z; en écrivant que les termes en $e^{(2n-\mu)z}$ sont égaux dans les deux membres, on trouve

$$A_1 = -1^{2n-1},$$

et, pour les valeurs de μ supérieures à 1,

$$\left\{\begin{aligned} A_\mu = (-1)^{\mu}\Big[\mu^{2n-1} &- \frac{2n}{1}(\mu-1)^{2n-1} + \dots \\ &+ (-1)^i\frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1.2\dots i}(\mu-i)^{2n-1} + \dots \\ &+ (-1)^{\mu-1}\frac{2n(2n-1)\dots(2n-\mu+2)}{1.2\dots(\mu-1)}1^{2n-1}\Big]; \end{aligned}\right.$$

mais les formules (25) et (26) donnent

$$(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + \frac{1}{2} A_n \right);$$

on a donc

$$\frac{(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n} B_n$$
$$= -1^{2n-1} + (2^{2n-1} - 2n) - \left[3^{2n-1} - 2n\,2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} \right] + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \left[(n-1)^{2n-1} - 2n(n-2)^{2n-1} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{2n\ldots(n+1)}{1\ldots(n-2)} 1^{2n} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} (-1)^n \right[n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2n\ldots(n-2)}{1\ldots(n-1)} 1^{2n-}$$

enfin, si l'on réunit les termes en n^{2n-1}, $(n-1)^{2n-1}\ldots$, on aura

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n} B_n = \frac{1}{2} n^{2n-1} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2n}{1} \right) (n-1)^{2n-1} \\ &+ \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1.2} \right] (n-2)^{2n-1} \\ &- \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} \right] (n-3)^{2} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

formule dans laquelle la loi de succession des termes est évidente.

CHAPITRE IV.

DE LA QUADRATURE ET DE LA RECTIFICATION DES COURBES.

De la quadrature des courbes planes.

549. L'opération qui a pour objet l'intégration d'une différentielle donnée $f(x)dx$ est souvent désignée sous le nom de *quadrature;* cette opération est effectivement, comme on l'a vu, celle qu'il faut exécuter quand on veut connaître l'aire comprise entre la courbe dont $f(x)$ est l'ordonnée, l'axe des abscisses et les deux ordonnées qui répondent à des abscisses déterminées.

Pour avoir l'aire comprise entre deux courbes données CMD, C'M'D' et les ordonnées CC'A, DD'B qui répondent aux abscisses x_0 et X, on remarquera que cette aire est la différence des deux CDBA, C'D'BA. Si l'on désigne par y, y' les ordonnées MP, M'P des deux courbes, qui répondent à l'abscisse variable x, l'aire demandée sera, dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$\int_{x_0}^{X} y\,dx - \int_{x_0}^{X} y'\,dx = \int_{x_0}^{X} (y-y')\,dx.$$

Cette formule est applicable au cas où l'on demande l'aire d'un segment compris entre un arc de courbe et sa corde; alors y' est une fonction linéaire $ax + b$.

Une aire plane limitée par des portions de courbes quelconques définies analytiquement peut toujours être décomposée en plusieurs parties positives ou négatives susceptibles d'être évaluées, comme nous venons de l'indiquer.

Dans les questions de quadratures, les coordonnées rectilignes ne sont pas toujours les variables qu'il convient d'employer. En particulier, il y a souvent avantage à faire usage des coordonnées polaires; on détermine alors les aires de certains secteurs formés par un arc de courbe et deux rayons vecteurs. Si l'on nomme ρ, ω les coordonnées polaires, ω_0 et Ω les valeurs de ω qui répondent aux rayons extrêmes, l'expression générale des secteurs dont nous parlons sera

$$\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} \rho^2 \, d\omega.$$

Si l'on veut avoir l'aire comprise entre deux courbes données et les rayons vecteurs qui répondent aux angles ω_0, Ω, on emploiera la formule

$$\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} (\rho^2 - \rho'^2) \, d\omega,$$

où ρ et ρ' désignent les rayons vecteurs des deux courbes données.

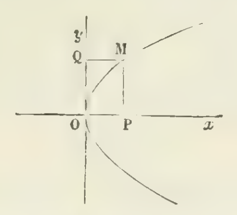
Nous avons donné, dans le Calcul différentiel, divers exemples de quadrature dans lesquels l'intégration s'effectue immédiatement; nous en présenterons ici quelques autres.

550. Paraboles. — On comprend sous la dénomination de *paraboles* les courbes représentées en coor-

données rectilignes par une équation de la forme

$$y^m = px^n,$$

où m et n sont des exposants positifs. Désignons par u l'aire OMP comprise entre la courbe, l'axe des ab-



scisses et l'ordonnée $MP = y$. On a, dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx,$$

d'où

$$u = p^{\frac{1}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n} xy.$$

Or, le produit xy est égal à l'aire du rectangle OPMQ, construit sur les coordonnées du point M ; on a donc

$$\frac{\text{OMP}}{\text{OPMQ}} = \frac{m}{m+n} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{OMP}}{\text{OMQ}} = \frac{m}{n};$$

par conséquent, la parabole partage l'aire du rectangle en deux parties qui sont entre elles dans le rapport des nombres m et n.

Réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété est une parabole, car la proportion précédente, savoir

$$\frac{u}{xy - u} = \frac{m}{n},$$

donne

$$u = \frac{m}{m+n} xy, \quad du = y\,dx = \frac{m}{m+n} (x\,dy + y\,dx)$$

et

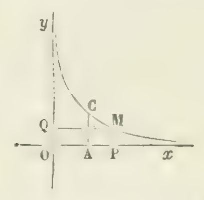
$$m\frac{dx}{x} - n\frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ou} \quad d\log x^m - d\log y^n = 0,$$

ce qui montre que le rapport $\frac{y^n}{x^m}$ est égal à une constante.

551. Hyperboles. — On désigne sous le nom d'*hyperboles* les courbes représentées en coordonnées rectilignes par une équation de la forme

$$x^n y^m = p,$$

où m et n sont des exposants positifs. Supposons que m ne soit pas inférieur à n et considérons la branche de



courbe située dans l'angle des coordonnées positives et qui a pour asymptotes les deux axes Ox, Oy. Soient $AC = y_0$, $MP = y$ les ordonnées qui répondent aux abscisses x_0 et x; u l'aire comprise entre ces ordonnées, l'axe des abscisses et la courbe. On a, dans le cas des coordonnées rectangulaires,

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}}\,dx,$$

d'où, en exceptant le cas de $m = n$,

$$u = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{m-n}{m}} - x_0^{\frac{m-n}{m}} \right).$$

On voit que l'aire u croît au delà de toute limite quand x tend vers l'infini; au contraire, elle tend vers

une limite finie

$$U = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} xy,$$

quand x_0 tend vers zéro. La formule précédente exprime que l'aire indéfinie U est au rectangle OPMQ, construit sur les coordonnées du point M, dans le rapport constant de m à $m-n$.

Cette propriété appartient exclusivement aux hyperboles, car la formule précédente donne

$$dU = y\,dx = \frac{m}{m-n}(x\,dy + y\,dx),$$

d'où l'on tire

$$m\frac{dy}{y} + n\frac{dx}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad d\log(x^n y^m) = 0,$$

et, par conséquent,

$$x^n y^m = \text{const.}$$

552. Lemniscate. — Parmi les courbes dont la quadrature peut être effectuée rigoureusement, au point de vue de la Géométrie, il faut remarquer la *lemniscate* de Bernoulli. Cette courbe a la propriété que *les distances de chacun de ses points à deux points fixes dont la distance est* $2a$ *ont un produit constant et égal à* a^2. En coordonnées polaires, la lemniscate a pour équation

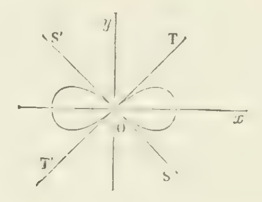
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega,$$

ρ désignant le rayon vecteur issu du centre. L'aire u du secteur déterminé par les rayons qui répondent aux valeurs ω_0, Ω de ω a pour valeur

$$u = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2}\rho^2\,d\omega = a^2 \int_{\omega_0}^{\Omega} \cos 2\omega\,d\omega = \frac{a^2}{2}(\sin 2\Omega - \sin 2\omega_0).$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe po-

laire Ox et à la perpendiculaire Oy à cet axe; elle est composée de deux branches fermées, et les deux tangentes TT′, SS′ menées par le centre O sont inclinées de



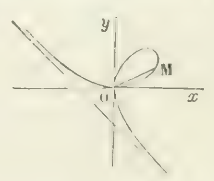
45 degrés sur l'axe. Si l'on veut l'aire comprise dans l'une des branches, il faudra faire $\omega_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\Omega = \frac{\pi}{4}$ dans la formule précédente, qui alors donnera

$$u = a^2.$$

553. Folium de Descartes. — La courbe connue sous ce nom a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

a étant un paramètre donné. Elle se compose de deux branches infinies qui se rencontrent à l'origine des coor-



données et qui ont pour asymptote la droite représentée par l'équation

$$x + y + a = 0.$$

Il convient de substituer à x et y les coordonnées polaires ρ et ω, telles que

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega.$$

L'équation de la courbe devient alors

$$\rho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega},$$

et celle de l'asymptote est

$$\rho_1 = \frac{-a}{\sin\omega + \cos\omega}.$$

L'aire comprise entre la courbe et les rayons qui répondent aux valeurs ω_0 et Ω de ω sera

$$u = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \frac{3a^2}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{3\tang^2\omega \frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1+\tang^3\omega)^2};$$

la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle de $\frac{-1}{1+\tang^3\omega}$; on a donc

$$u = \frac{3a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\tang^3\omega_0} - \frac{1}{1+\tang^3\Omega}\right].$$

Si l'on veut l'aire de la surface de la boucle formée par la courbe, on fera $\omega_0 = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$, ce qui donnera pour résultat $\frac{3a^2}{2}$.

Pour avoir l'aire comprise entre une branche de la courbe, son asymptote et deux rayons vecteurs, il faudra retrancher u de l'aire u_1 comprise entre l'asymptote et les rayons vecteurs. Cette aire u_1 est celle d'un triangle; elle a d'ailleurs pour expression

$$u_1 = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2}\rho_1^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1+\tang\omega)^2}$$

ou

$$u_1 = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{1+\tang\omega_0} - \frac{1}{1+\tang\Omega}\right];$$

on aura donc

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2}\left[\frac{2-\tan\Omega}{1-\tan\Omega+\tan^2\Omega} - \frac{2-\tan\omega_0}{1-\tan\omega_0+\tan^2\omega_0}\right].$$

Si l'on veut l'aire indéfinie comprise entre la partie négative de l'axe des x, la courbe et son asymptote, il faudra faire $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\Omega = \pi$, et il vient alors

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2};$$

on trouve évidemment la même valeur pour l'aire comprise entre la partie positive de l'axe des y, la courbe et son asymptote. En ajoutant à ces deux aires celle du triangle formé par l'asymptote et les axes, laquelle est encore égale à $\frac{a^2}{2}$, on obtiendra l'aire totale $\frac{3a^2}{2}$ comprise entre les deux branches infinies et leur asymptote. Cette aire est égale, comme on voit, à celle de la boucle fermée.

De la rectification des courbes.

534. Le problème de la rectification des courbes planes ou gauches ne diffère pas de celui dont nous venons de nous occuper.

Soit s un arc de courbe plane compté à partir d'une origine arbitraire ; dans le système des coordonnées rectangulaires, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

si donc on désigne par t la variable indépendante, par t_0, T les valeurs de t qui répondent à l'origine d'un arc S et à son extrémité, on aura, en supposant que t varie dans le même sens quand on décrit l'arc S,

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt.$$

Si l'on emploie les coordonnées polaires ρ et ω, et que l'on désigne toujours par t la variable indépendante, on aura (n° 202)

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{dt} dt.$$

Des formules analogues ont lieu pour les courbes gauches. Désignons par s l'arc d'une courbe quelconque, compté à partir d'une origine arbitraire; dans le système des coordonnées rectangulaires, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

et, quand on emploie les coordonnées polaires r, θ, ψ, la même différentielle a pour expression (n° 259)

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2};$$

donc, si l'on représente par t la variable indépendante, l'arc S, dont les extrémités répondent aux valeurs t_0 et T de t, aura pour expression

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} dt$$

ou

$$S = \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2}}{dt} dt.$$

S'il s'agit d'une courbe sphérique, et qu'on prenne le centre de la sphère pour origine des rayons vecteurs, on aura $r =$ const., et la formule précédente deviendra

$$S = r \int_{t_0}^{T} \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}}{dt} dt.$$

Nous avons donné, dans le Calcul différentiel, l'expression d'un arc de parabole, et nous avons été conduit

naturellement à traiter aussi de la rectification de quelques autres courbes. Il serait superflu de multiplier ici les exemples, et nous nous bornerons à en présenter quelques-uns qui offrent un certain intérêt pour la Géométrie ou même pour l'Analyse.

Rectification de l'ellipse et de l'hyperbole.

555. Considérons une ellipse dont le demi-grand axe sera pris pour unité et dont l'excentricité sera représentée par k. Les coordonnées rectangulaires de la courbe rapportée à ses axes seront (nº 221) $\sin\varphi$, $\sqrt{1-k^2}\cos\varphi$, et la différentielle de l'arc sera $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$. D'après cela, si l'on désigne, avec Legendre, par $E(\varphi)$ la longueur de l'arc d'ellipse compté à partir de l'une des extrémités du petit axe, où l'angle φ est nul, et terminé au point qui répond à une valeur quelconque de φ, on aura

$$(1)\qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

et l'on peut écrire aussi (nº 221)

$$(2)\qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on considère en même temps une hyperbole dont le demi-axe transverse soit k et le demi-axe non transverse $\sqrt{1-k^2}$, les coordonnées de la courbe rapportée à ses axes pourront être représentées (nº 222) par $(1-k^2)\tang\varphi$ et $\dfrac{k\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$; désignant alors par $\Upsilon(\varphi)$ l'arc d'hyperbole compté à partir de l'axe des sommets où φ est nul, et terminé au point qui répond à une valeur

quelconque de φ, on aura

$$(3)\qquad \Upsilon(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

et l'on peut écrire aussi (n° 222)

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}\Upsilon(\varphi)=k^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-k^2\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\ +\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (2) et (4) montrent que l'arc d'ellipse $E(\varphi)$ et l'arc d'hyperbole $\Upsilon(\varphi)$ s'expriment par le moyen des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, et réciproquement ces intégrales elliptiques peuvent s'exprimer au moyen d'un arc d'ellipse et d'un arc d'hyperbole ; il convient de se rappeler que la partie algébrique $\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ contenue dans la formule (4) est égale à la tangente, à l'extrémité de l'arc $\Upsilon(\varphi)$, terminée par la perpendiculaire abaissée du centre de la courbe sur cette tangente (n° 222).

Legendre a désigné par la notation $F(\varphi)$ la fonction elliptique de première espèce ; ainsi l'on a

$$F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ou

$$(5)\qquad F(\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

en faisant, pour abréger, comme au n° 438,

$$(6)\qquad \Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi};$$

mais l'illustre auteur a adopté, pour fonction de deuxième espèce, l'arc d'ellipse $E(\varphi)$, et de là la dénomination de *fonctions elliptiques* appliquée aux transcendantes que

nous considérons. La formule (2) donne

$$(7)\qquad \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}[\mathrm{F}(\varphi)-\mathrm{E}(\varphi)],$$

en sorte que la fonction que nous sommes convenus de choisir pour constituer la deuxième espèce des intégrales elliptiques s'exprime au moyen de l'arc d'ellipse et de la fonction de première espèce.

La formule (4) donne aussi, en faisant usage de la formule (2),

$$(8)\qquad \Upsilon(\varphi) = (1-k^2)\mathrm{F}(\varphi) - \mathrm{E}(\varphi) + \Delta\varphi\tang\varphi.$$

556. On peut développer en série les arcs d'ellipse et d'hyperbole, ou, ce qui revient au même, les fonctions $\mathrm{F}(\varphi)$ et $\mathrm{E}(\varphi)$ (n° 483). On a, par la formule du binôme,

$$\frac{1}{\Delta\varphi} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi + \ldots,$$

$$\Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi - \ldots,$$

et, par conséquent,

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\varphi) = \varphi + \dfrac{1}{2}k^2\displaystyle\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi + \dfrac{1.3}{2.4}k^4\displaystyle\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi \\ \qquad\qquad + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}k^6\displaystyle\int_0^\varphi \sin^6\varphi\,d\varphi + \ldots, \\ \mathrm{E}(\varphi) = \varphi - \dfrac{1}{2}k^2\displaystyle\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi - \dfrac{1}{2.4}k^4\displaystyle\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3}{2.4.6}k^6\displaystyle\int_0^\varphi \sin^6\varphi\,d\varphi - \ldots. \end{cases}$$

Les séries contenues dans ces formules sont toujours convergentes à cause de $k<1$, et l'on verra plus loin qu'on peut toujours diminuer ce module autant qu'on le

veut ; la première formule ne diffère pas de l'une de celles que nous avons données au n° 477 ; les intégrales contenues dans les seconds membres sont données par les formules du n° 456.

Lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les fonctions $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ sont les *intégrales complètes* de première et de deuxième espèce de Legendre ; nous les représenterons par F_1, E_1. On a (n° 488)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2};$$

et, par conséquent,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} F_1 &= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 3k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 5k^6 + \ldots\right],\\ E_1 &= \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3k^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5k^6 - \ldots\right]; \end{aligned}\right.$$

la seconde des formules (10) donne la longueur du quadrant de l'ellipse.

Du changement du module dans les fonctions elliptiques. — Théorème de Landen.

557. Une des propriétés les plus remarquables des intégrales elliptiques de première espèce consiste en ce que chacune de ces fonctions peut être transformée d'une infinité de manières différentes en une autre fonction elliptique de même espèce dont le module est à volonté plus petit ou plus grand que le module de la proposée. Il en résulte que l'on peut former diverses séries de modules, indéfinies dans les deux sens, dont les termes s'approchent respectivement de zéro et de l'unité, et qui répondent à des fonctions elliptiques de première es-

pèce égales entre elles. Nous ne saurions entreprendre dans cet Ouvrage le développement de l'importante théorie de la *transformation* des fonctions elliptiques; mais nous croyons utile cependant de faire connaître la première *échelle* de modules découverte par Legendre, ce qui nous permettra d'établir le curieux théorème de Landen relativement aux arcs d'hyperbole.

Soient k une quantité donnée comprise entre o et 1, φ un angle variable, et posons comme précédemment

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi},$$

le radical étant pris avec le signe $+$. On peut déterminer un angle φ_1 qui satisfasse aux deux équations

$$(1) \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi, \quad \cos(2\varphi_1 - \varphi) = \Delta\varphi,$$

qui, en outre, varie d'une manière continue avec φ et s'annule en même temps que lui. Puisque $\Delta\varphi$ est positif, l'angle $2\varphi_1 - \varphi$ restera toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; si l'on désigne par Φ l'angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ qui a $k \sin\varphi$ pour sinus, on aura

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \Phi}{2},$$

en sorte que φ_1 est déterminé sans ambiguïté lorsque φ est donné; réciproquement la valeur de φ est entièrement déterminée quand φ_1 est donné. Ces deux angles varient simultanément de o à $+\infty$ ou de o à $-\infty$; quand $\varphi = \pi$, Φ est nul et l'on a $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées par $-\sin\varphi$ et $+\cos\varphi$, puis par $+\cos\varphi$ et $+\sin\varphi$,

il viendra

$$\cos 2\varphi_1 = \cos\varphi\,\Delta\varphi - k\sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi_1 = \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \varphi\,\Delta\varphi),$$

d'où

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\cos^2\varphi_1 &= 1 - k\sin^2\varphi + \cos\varphi\,\Delta\varphi,\\ 2\sin^2\varphi_1 &= 1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\,\Delta\varphi,\\ 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1 &= \sin\varphi\,(k\cos\varphi + \Delta\varphi).\end{aligned}\right.$$

La première des équations (1) donne aussi

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{k + \cos 2\varphi_1},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tang}(\varphi - \varphi_1) = \frac{1 - k}{1 + k}\operatorname{tang}\varphi_1,$$

et, si l'on pose

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k},\qquad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi_1},$$

on aura encore

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2}{1+k}\,\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1},\\ \cos\varphi &= \frac{1 - \dfrac{2}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1},\\ \Delta\varphi &= \frac{1 - \dfrac{2k}{1+k}\sin^2\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}.\end{aligned}\right.$$

Ensuite, la première des formules (1) donne par la différentiation, en faisant usage de la seconde formule,

$$\frac{2\,d\varphi_1}{k\cos\varphi + \Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

ou, à cause de la troisième formule (2) et de la première formule (5),

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1 + k}{2}\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

et, puisque φ et φ_1 s'annulent en même temps, on aura

$$(6)\qquad \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi_1}} = \frac{1+k}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

ce qui est l'importante formule découverte par Legendre. Si l'on pose

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad F(k_1,\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1},$$

l'équation (6) deviendra

$$(7)\qquad F(k_1,\varphi_1) = \frac{1+k}{2} F(k,\varphi).$$

Désignons par $F_1(k)$, $F_1(k_1)$ les fonctions complètes de modules k et k_1; lorsque φ est égal à π, l'angle φ_1 a la valeur $\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs on a évidemment

$$F(k,\pi) = 2F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = 2F_1(k),$$

donc

$$(8)\qquad F_1(k_1) = (1+k)\,F_1(k).$$

558. D'après ce qui précède, les modules k et k_1 peuvent être ramenés l'un à l'autre; ces modules sont liés entre eux par la relation

$$(9)\qquad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

et si l'on désigne par k', k'_1 les modules complémentaires de k et k_1, c'est-à-dire $\sqrt{1-k^2}$ et $\sqrt{1-k_1^2}$, on aura

$$(10)\qquad k'_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

d'où

$$(11)\qquad k = \frac{1-k'_1}{1+k'_1};$$

la formule (10) donne

$$(12)\qquad k'_1 = \frac{k'^2}{(1+k)^2}, \quad \text{d'où} \quad k'_1 < k'^2.$$

Il résulte de là que, si l'on considère une suite infinie dans les deux sens,

$$(13)\qquad \ldots k_{-2},\quad k_{-1},\quad k_0,\quad k_1,\quad k_2,\quad \ldots,$$

dans laquelle le terme $k_0 = k$ est inférieur à 1, et dont chaque terme se déduit du précédent par la formule

$$(14)\qquad k_{i-1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i};$$

le terme k_m tendra vers l'unité si m tend vers $+\infty$, et il tendra vers zéro si m tend vers $-\infty$. On peut donc ramener une fonction elliptique de première espèce $F(k, \varphi)$ à une autre $F(k_i, \varphi_i)$, dans laquelle le module k_i est aussi près que l'on voudra de zéro ou de l'unité; quant à l'amplitude φ_i de cette nouvelle fonction, elle peut être facilement calculée par le moyen des formules établies précédemment.

Considérons, par exemple, la fonction complète $F_1(k)$; on aura, par la formule (8),

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1+k_{-1})\, F(k_{-1}) \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\, F(k_{-2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2})\ldots(1+k_{-i})\, F(k_{-i}). \end{aligned}$$

Or, si i tend vers $+\infty$, k_{-i} tend vers zéro, et $F(k_{-i})$ tend vers la limite $\frac{\pi}{2}$; on a donc ce développement remarquable de la fonction complète $F_1(k)$:

$$(15)\qquad F_1(k) = \frac{\pi}{2}(1+k_{-1})(1+k_{-2})(1+k_{-3})\ldots.$$

539. La transformation dont nous venons de nous occuper conduit à des résultats importants relatifs aux fonctions de deuxième espèce. Si l'on multiplie l'équation

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1+k}{2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

par $\sin^2\varphi_1$, on aura, par les formules (2),

$$\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1+k}{4}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1+k}{4}\cos\varphi\, d\varphi,$$

et, en intégrant,

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} &= \frac{k(1+k)}{4}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} \\ &\quad + \frac{1+k}{4}F(k,\varphi) - \frac{1+k}{4}\sin\varphi. \end{aligned} \right.$$

Introduisons, au lieu des intégrales de deuxième espèce, les arcs d'ellipse $E(k,\varphi)$, $E(k_1,\varphi_1)$; comme on a (n° 535)

$$\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}[F(k,\varphi) - E(k,\varphi)],$$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin^2\varphi_1\, d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1} = \frac{1}{k_1^2}[F(k_1,\varphi_1) - E(k_1,\varphi_1)],$$

la formule (16) deviendra, en faisant usage de la formule (7),

$$(17)\quad (1+k)E(k_1,\varphi_1) = E(k,\varphi) - \frac{1}{2}k'^2F(k,\varphi) + k\sin\varphi.$$

Cette équation montre que la fonction elliptique de première espèce $F(k,\varphi)$ peut s'exprimer par deux arcs appartenant à deux ellipses différentes.

L'arc d'hyperbole est donné, comme on l'a vu au

n° 555, par la formule

$$\Upsilon(k, \varphi) = k'^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi) + \tang \varphi \Delta\varphi;$$

en éliminant la fonction F de cette expression au moyen de la formule (17), il vient

$$(18)\quad \begin{cases} \Upsilon(k, \varphi) = E(k, \varphi) - 2(1+k) E(k_1, \varphi_1) \\ \qquad + 2k \sin\varphi + \tang\varphi\Delta\varphi. \end{cases}$$

Si l'on retranche de cette formule celle qu'on en déduit en changeant φ et φ_1 en Φ et Φ_1, l'équation résultante exprimera le théorème découvert, il y a plus d'un siècle, par le géomètre anglais Landen, savoir que *tout arc d'hyperbole peut être exprimé par deux arcs d'ellipse*. Réciproquement, *tout arc d'ellipse peut être exprimé par deux arcs d'hyperbole;* il est facile de conclure cette proposition des formules que nous avons établies.

560. Si dans la formule (17) on suppose $\varphi = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, on obtiendra la relation suivante entre les fonctions complètes :

$$(1+k) E_1(k_1) = 2E_1(k) - k'^2 F_1(k).$$

Remplaçant k, k' et k_1 d'abord par k_i, k'_i, k_{i+1}, puis par k_{i-1}, k'_{i-1}, k_i, on aura

$$(1+k_i) E_1(k_{i+1}) = 2E_1(k_i) - k'^2_i F_1(k_i),$$
$$(1+k_{i-1}) E_1(k_i) = 2E_1(k_{i-1}) - k'^2_{i-1} F_1(k_{i-1}),$$

les modules k_{i-1}, k_i, k_{i+1} étant déterminés en fonction du module initial k_0 ou k, comme on l'a expliqué au n° 558. On a aussi (n° 557)

$$F_1(k_i) = (1+k_{i-1}) F_1(k_{i-1});$$

si donc on élimine la fonction F_1 entre les équations pré-

cédentes, et que l'on remplace k_{i-1}, k'_{i-1} par les quantités égales $\frac{1-k'_i}{1+k'_i}$, $\frac{2\sqrt{k'_i}}{1+k'_i}$, il viendra

$$(19)\quad k'_i(1+k'_i)\,\mathrm{E}_1(k_{i-1}) - (2+k'_i)\,\mathrm{E}_1(k_i) + (1+k_i)\,\mathrm{E}_1(k_{i+1}) = 0,$$

relation remarquable entre les circonférences de trois ellipses ayant pour excentricités k_{i-1}, k_i, k_{i+1}.

Des courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle.

561. La recherche des courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle offre un certain intérêt au point de vue de la Géométrie, car on peut exécuter sur ces courbes, comme sur le cercle, toutes les constructions relatives à l'addition ou à la soustraction des arcs, à leur multiplication et à leur division. Euler s'est beaucoup occupé de cette recherche, et, dans un Mémoire qui n'a été publié qu'après sa mort, il a fait connaître une famille de courbes possédant la propriété en question, courbes qu'il n'a trouvées, dit-il, qu'après avoir travaillé longtemps sur cette matière.

Les courbes découvertes par Euler ne forment qu'un cas très-particulier de celles dont l'arc indéfini s'exprime par un arc de cercle, et dont les coordonnées rectilignes sont des fonctions rationnelles de la tangente trigonométrique de cet arc. J'ai fait connaître toutes ces courbes dans un Mémoire qui fait partie du XXXV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et j'ai montré qu'elles formaient une infinité de classes distinctes, comprenant chacune une infinité de courbes individuelles. Je me bornerai ici à développer la solution du cas le plus simple, qui comprend les courbes de la première classe.

Si l'on désigne par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$, par g une quantité positive, par ϖ un angle réel et par e la base des logarithmes népériens, puis que l'on fasse

$$t = (z-a)^{n-1}(z-b)^{p-1}(z-c)^{q-1}\ldots$$
$$\tau = (z-\alpha)^{n-1}(z-\beta)^{p-1}(z-\gamma)^{q-1}\ldots,$$

a et α étant des constantes imaginaires et conjuguées, ainsi que b et β, c et γ, ..., et m, n, p, q, ... étant des entiers positifs, la solution générale du problème proposé sera donnée par la formule

$$(1)\qquad x+iy = ge^{i\varpi}\int \frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

pourvu que les constantes $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ soient choisies de manière que l'intégrale qui figure dans la formule précédente soit algébrique. On a effectivement

$$dx+i\,dy = ge^{i\varpi}\frac{t}{\tau}\,\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

et, en changeant i en $-i$,

$$dx-i\,dy = ge^{-i\varpi}\frac{\tau}{t}\,\frac{(z+i)^m}{(z-i)^{m+2}}\,dz.$$

La multiplication des formules précédentes donne

$$dx^2+dy^2 = \frac{g^2\,dz^2}{(z^2+1)^2},\quad \text{d'où}\quad \sqrt{dx^2+dy^2} = g\,\frac{dz}{1+z^2},$$

et

$$\int_0^z \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dz}\,dz = g \operatorname{arctang} z.$$

Comme le degré du numérateur de la fraction $\frac{t}{\tau}\frac{(z-i)^m}{(z+i)^{m+2}}$ est inférieur de deux unités au degré du dénominateur, si μ désigne le nombre des constantes a, b,

c, ... ou α, $\mathfrak{E}$, γ, ..., il suffira de satisfaire à $\mu - 1$, conditions (n° 419) pour rendre algébrique l'expression de $x + iy$.

Lorsque t et τ se réduisent à l'unité, notre formule ne donne pas d'autre courbe que le cercle; le cas le plus simple est donc celui dans lequel on a

$$t = (z - a)^{n+1}, \quad \tau = (z - \alpha)^{n+1}.$$

La formule (1) devient alors

$$(2) \qquad x + iy = ge^{i\varpi} \int \frac{(z - a)^{n+1}(z - i)^m}{(z - \alpha)^{n+1}(z + i)^{m+2}} dz,$$

et une seule condition suffit pour que l'intégrale soit algébrique. Pour trouver cette condition de la manière la plus simple, soit u une nouvelle variable, et posons

$$\frac{z - i}{z + i} = \frac{a - i}{a + i} u;$$

faisons aussi, pour abréger,

$$(3) \qquad \zeta = \frac{(a + i)(\alpha - i)}{(a - i)(\alpha + i)};$$

on aura

$$\frac{dz}{(z + i)^2} = \frac{1}{2i} \frac{a - i}{a + i} du$$

et

$$\frac{(z - i)^m dz}{(z + i)^{m+2}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{a - i}{a + i}\right)^{m+1} u^m du,$$

puis

$$\frac{z - a}{z - \alpha} = \frac{a + i}{\alpha + i} \frac{u - 1}{u - \zeta}.$$

D'après cela, la formule (2) devient

$$x + iy = A \int \frac{u^m (u - 1)^{n+1} du}{(u - \zeta)^{n+1}},$$

en faisant, pour abréger,

$$A = \frac{g}{2i} e^{i\varpi} \left(\frac{a+i}{\alpha+i}\right)^{n+1} \left(\frac{a-i}{a+i}\right)^{m-1}.$$

On voit alors que la condition pour que $x+iy$ soit algébrique est

$$(4) \qquad \frac{d^n \zeta^m (\zeta - 1)^{n+1}}{d\zeta^n} = 0.$$

Cette équation en ζ est du degré $m+1$; elle a une racine égale à 1, et, si n est inférieure à m, elle a $m-n$ racines nulles; le nombre des racines différentes de 0 et de 1 est donc égal au plus petit des nombres m et n; on reconnaît que toutes ces racines sont réelles, inégales et comprises entre 0 et 1, en appliquant n fois de suite le théorème de Rolle à l'équation

$$\zeta^m (\zeta - 1)^{n+1} = 0,$$

qui a m racines nulles et $n+1$ racines égales à 1. Les racines nulles de l'équation (4) ne peuvent nous convenir, car, pour $\zeta = 0$, la formule (3) donne $a = -i$ ou $\alpha = +i$; mais l'une de ces équations entraîne l'autre, puisque a et α sont conjugués; les facteurs $z-a$, $z-\alpha$ deviennent $z+i$, $z-i$; par suite, on retombe sur le cas où les polynômes t et τ se réduisent à l'unité. Pour $\zeta = 1$ l'équation (3) donne $a = \alpha$, et la formule (2) se réduit encore à celle que donne l'hypothèse $t = \tau = 1$.

Mais à chacune des racines ζ comprises entre 0 et 1 répondent pour a et α des valeurs imaginaires et conjuguées l'une de l'autre. Remarquons d'abord qu'on peut supposer

$$(5) \qquad a\alpha = 1$$

sans diminuer la généralité de la solution, car on ramènera le cas contraire à celui-là par un changement de

variable. Il suffira effectivement d'écrire $\frac{z-\varepsilon}{1-\varepsilon z}$ au lieu de z, en prenant pour ε l'une des racines de l'équation

$$\varepsilon^2 + 2\frac{a-\alpha}{a\alpha-1}\varepsilon - 1 = 0;$$

par la transformation dont il vient d'être question, la formule (2) devient

$$x+iy = ge^{i\varpi}\int\frac{(z-a_1)^{n-1}(z-i)^m}{(z-\alpha_1)^{n+1}(z+i)^{m+2}}\,dz,$$

a_1 et α_1 ayant les valenrs suivantes :

$$a_1 = \frac{a-\varepsilon}{1-a\varepsilon}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha-\varepsilon}{1-\alpha\varepsilon};$$

d'où l'on conclut $a_1\alpha_1 = 1$. On peut donc admettre l'équation (5), et de cette équation, combinée avec (3), on tire alors

$$(6)\quad \begin{cases} a = \dfrac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta} - \dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}i, \\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta} + \dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}i; \end{cases}$$

si l'on donne à a et à α ces valeurs dans la formule (2), l'expression de $x+iy$ sera algébrique.

562. Considérons le cas de $m=1$ qui répond aux courbes d'Euler. L'équation (2) devient

$$(7)\qquad x+iy = ge^{\varpi i}\int\frac{(z-a)^{n-1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n+1}(z+i)^3}\,dz,$$

et l'équation de condition est

$$\frac{d^2\,\zeta^{n-1}(\zeta-1)}{d\zeta^2} = 0,$$

d'où l'on tire, en faisant abstraction des racines $\zeta = 0$,

$$\zeta = \frac{n}{n-2}.$$

Les équations (6) donnent ensuite les valeurs suivantes de a et de α :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} - \frac{i}{n+1}, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \frac{i}{n+1}. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale qui forme le second membre de l'équation (7) étant une fonction algébrique, il est clair que le dénominateur de cette fonction est $(z-\alpha)^n(z+i)^2$. En outre, si l'on prend l'intégrale de manière qu'elle s'annule pour $z = a$, le numérateur sera divisible par $(z-a)^{n+2}$, et, parce que ce numérateur ne peut être que du degré $n+2$, on aura un résultat de la forme

$$x + iy = ge^{\varpi i}\frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n(z+i)^2} + \text{const.}$$

Comme la constante n'influe que sur la position de l'origine des coordonnées, nous la supposerons nulle, et nous prendrons simplement

$$(9)\qquad x + iy = ge^{\varpi i}\frac{(z-a)^{n+2}}{(z-\alpha)^n(z+i)^2},$$

où g et ϖ n'ont pas, bien entendu, les mêmes valeurs numériques que précédemment. On aura l'équation des courbes dont nous nous occupons, en coordonnées rectilignes, en éliminant z entre l'équation (9) et celle qu'on en déduit par le changement de i en $-i$; mais il est plus simple d'employer les coordonnées polaires et de substituer l'intégration à l'élimination.

En différentiant l'équation (9) et en faisant usage

des formules (8), il vient

$$(10)\qquad dx + i\,dy = \frac{2\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\, g e^{\varpi i}\, \frac{(z-a)^{n+1}(z-i)}{(z-\alpha)^{n-1}(z+i)^3}\, dz;$$

il faut remarquer que l'équation (9) entraîne l'équation (10) quel que soit n; nous pouvons donc supposer ce nombre fractionnaire, car la courbe à laquelle l'équation (9) se rapporte ne cessera pas d'être algébrique. Ainsi les résultats qui vont suivre acquièrent une généralité que ne comportait pas notre énoncé.

Multipliant chacune des équations (9) et (10) par sa conjuguée, il vient

$$x^2 + y^2 = g^2\, \frac{(z-a)^2(z-\alpha)^2}{(z-i)^2(z+i)^2},$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4n(n+2)}{(n+1)^2}\, g^2\, \frac{dz^2}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Désignons par ρ le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$, par ds la différentielle de l'arc de courbe, savoir $\sqrt{dx^2+dy^2}$, et prenons ds de signe contraire à dz; on aura

$$\rho = g\, \frac{z^2 - 2z\dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + 1}{z^2+1},$$

$$ds = -2g\, \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\, \frac{dz}{z^2+1};$$

et, en posant

$$z = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right),\quad \text{d'où}\quad dz = -\frac{1}{2}\, \frac{d\lambda}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\lambda}{2}\right)},$$

ces formules deviennent

$$(11)\qquad \rho = g\left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda\right),$$

$$(12)\qquad ds = g\, \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\, d\lambda.$$

En différentiant l'équation (11), on trouve

$$d\rho = -g\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\sin\lambda\, d\lambda,$$

d'où

(13) $$\frac{d\rho}{ds} = -\sin\lambda,$$

et, si ω désigne la seconde coordonnée polaire, on pourra poser

(14) $$\frac{\rho\, d\omega}{ds} = +\cos\lambda,$$

puisque $d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = ds^2$.

Des équations (11), (12) et (14) on déduit

$$d\omega = \frac{ds\cos\lambda}{\rho} = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda\, d\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}$$

ou

(15) $$d\omega = d\lambda - \frac{d\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}.$$

Pour intégrer l'expression (15), nous ferons usage d'une nouvelle variable λ', déterminée par les deux équations

(16) $$\cos\lambda' = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}+\cos\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}, \quad \sin\lambda' = \frac{\frac{1}{n+1}\sin\lambda}{1+\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda}.$$

Ces équations sont compatibles, car on en déduit

$$\cos^2\lambda' + \sin^2\lambda' = 1.$$

En différentiant la seconde équation (16), il vient

$$\cos\lambda'\,d\lambda' = \frac{1}{n+1}\,\frac{\dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}+\cos\lambda}{\left(1+\dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda\right)^2}\,d\lambda,$$

d'où, à cause de la première équation (16),

$$(n+1)\,d\lambda' = \frac{d\lambda}{1+\dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}\cos\lambda};$$

par suite, l'équation (15) devient

$$d\omega = d\lambda - (n+1)\,d\lambda',$$

Intégrons cette équation de manière que ω s'annule en même temps que λ et λ'; il viendra

(17) $$\omega = \lambda - (n+1)\lambda',$$

d'où

(18) $$\cos\omega + i\sin\omega = (\cos\lambda + i\sin\lambda)(\cos\lambda' - i\sin\lambda')^{n+1},$$

Faisons, pour abréger,

(19) $$\mathrm{R} = \sqrt{-\rho^2 + 2g\rho - \frac{g^2}{(n+1)^2}};$$

on aura, par l'équation (11),

(20) $$\cos\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{\rho-g}{g}, \qquad \sin\lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\frac{\mathrm{R}}{g};$$

et les équations (16) donneront ensuite

(21) $$\begin{cases} \cos\lambda' = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\dfrac{(n+1)\rho - \dfrac{g}{n+1}}{\rho}, \\[2ex] \sin\lambda' = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\,\dfrac{\mathrm{R}}{\rho}. \end{cases}$$

On a, d'après cela,

$$\cos\lambda + i\sin\lambda = \frac{1}{g}\,\frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}}(\rho - g + i\mathrm{R}),$$

$$\cos\lambda' - i\sin\lambda' = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}\left[(n+1)\rho - \frac{g}{n+1} - i\mathrm{R}\right];$$

et l'équation (18) devient enfin

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}&\cos\omega + i\sin\omega\\ &= \frac{n+1}{g\left[\sqrt{n(n+2)}\right]^{n+2}}\,\frac{(\rho - g + i\mathrm{R})\left[(n+1)\rho - \dfrac{g}{n+1} - i\mathrm{R}\right]^{n+1}}{\rho^{n+1}}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation (22) se décompose en deux autres qui font connaître $\cos\omega$ et $\sin\omega$ en fonction de ρ; l'une ou l'autre de celles-ci peut être regardée comme l'équation de nos courbes en coordonnées polaires.

En multipliant l'équation (22) par ρ, il vient

$$(23)\quad x + iy = \frac{n+1}{g\left[\sqrt{n(n+2)}\right]^{n+2}}\,\frac{(\rho - g + i\mathrm{R})\left[(n+1) - \dfrac{g}{n+1} - i\mathrm{R}\right]^{n+1}}{\rho^{n}};$$

dans le cas particulier de n entier, les valeurs de x et y ont la forme suivante :

$$x = \frac{\mathrm{F}(\rho)}{\rho^n},\quad y = \frac{f(\rho)}{\rho^n} - \mathrm{R},$$

F et f désignant des fonctions entières de ρ.

563. Dans le cas général, l'équation (22) est trop compliquée pour pouvoir servir utilement à l'étude des courbes qu'elle représente, et il vaut mieux employer le système formé des équations (11), (16) et (17), ainsi que l'a fait Euler.

Si l'on prend pour unité la quantité $g\dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$, les

équations (11) et (12) se réduiront à

$$\rho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos\lambda,$$

$$ds = d\lambda;$$

on a, par suite,

$$s = \lambda,$$

en comptant les arcs à partir de $\lambda = 0$, et il vient

$$\rho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos s$$

pour l'équation générale de nos courbes entre l'arc et le rayon vecteur. Ces résultats sont conformes à ceux qu'Euler a obtenus.

564. Dans le cas de $n = 1$, l'équation (22) devient, en prenant $\frac{g}{2}$ pour unité,

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\rho - 2 + iR)(2\rho - 1 - iR)^2}{3\rho^2\sqrt{3}},$$

et l'on a

$$R = \sqrt{-\rho^2 + 4\rho - 1}.$$

Il en résulte que la courbe relative au cas de $n = 1$ est représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$\cos\omega = \frac{\rho^3 + 6\rho - 2}{3\rho^2\sqrt{3}},$$

$$\sin\omega = \frac{(\rho^2 + 2\rho - 2)\sqrt{-\rho^2 + 4\rho - 1}}{3\rho^2\sqrt{3}}.$$

Dans le cas de $n = 2$, l'équation (22) devient, en prenant $\frac{g}{3}$ pour unité,

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{(\rho - 3 + iR)(3\rho - 1 - iR)^3}{64\rho^3},$$

et l'on a

$$R = \sqrt{-\rho^2 + 6\rho - 1}.$$

Il en résulte que la courbe relative au cas de $n = 2$ est représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$\cos\omega = \frac{\rho^4 + 14\rho^2 - 8\rho + 1}{8\rho^3},$$

$$\sin\omega = \frac{(\rho - 1)(\rho^2 + 4\rho - 1)\sqrt{-\rho^2 + 6\rho - 1}}{8\rho^3}.$$

Rectification de la lemniscate et de l'ovale de Cassini.

565. La lemniscate a pour équation en coordonnées polaires (n° 552)

$$\rho^2 = 2a^2\cos 2\omega;$$

il s'ensuit que l'on a

$$\rho\frac{d\rho}{d\omega} = -2a^2\sin 2\omega, \quad \rho^4 + \rho^2\frac{d\rho^2}{d\omega^2} = 4a^4,$$

d'où, en désignant par s l'arc de la courbe compté à partir d'une origine arbitraire,

$$ds = 2a^2\frac{d\rho}{\sqrt{4a^4 - \rho^4}} \quad \text{ou} \quad ds = a\sqrt{2}\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Si l'on fait

$$\sin\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \quad \cos\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

il viendra

$$ds = a\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Si donc on prend la ligne a pour unité, et que l'on fasse

commencer l'arc s au point où $\omega = 0$, $\varphi = 0$, on aura

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Ainsi, *l'arc de la lemniscate n'est autre chose que l'intégrale elliptique de première espèce dont l'amplitude est* φ *et dont le module a pour carré* $\frac{1}{2}$.

On verra plus loin que les fonctions elliptiques de première espèce peuvent être ajoutées ou retranchées entre elles, multipliées ou divisées algébriquement, de la même manière que les arcs de cercle; il s'ensuit donc que l'on peut effectuer sur la lemniscate des constructions analogues à celles auxquelles on est conduit dans la théorie du cercle.

566. La lemniscate n'est qu'un cas particulier de la courbe connue sous le nom d'*ovale de Cassini*, et qui est définie par la propriété que le produit des distances de chaque point de la courbe à deux points fixes est constant. L'équation de cette courbe est, en coordonnées polaires,

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\omega + a^4 = b^4,$$

$2a$ étant la distance des deux points fixes, et b^2 le produit constant des distances d'un point de la courbe à ces points fixes.

L'ovale de Cassini affecte trois formes très-différentes, selon que le rapport $\frac{b}{a}$ est inférieur, égal ou supérieur à l'unité; dans le cas de $\frac{b}{a} = 1$, elle coïncide avec la lemniscate.

Nous supposerons d'abord $\frac{b}{a} < 1$, et nous ferons

$b^2 = a^2 \sin 2\alpha$; dans ce cas, la courbe est formée de deux boucles fermées égales entre elles, et l'angle 2α est celui que forment entre elles les tangentes menées par le centre. Les rayons vecteurs qui répondent aux valeurs ω_0 et ω_1 de ω déterminent sur la courbe deux arcs que je représenterai par $s(\omega_0, \omega_1)$, $\sigma(\omega_0, \omega_1)$, ou simplement par $s(\omega_1)$, $\sigma(\omega_1)$, si $\omega_0 = 0$. D'après cela, on trouve facilement

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}} d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega - \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}} d\omega,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\alpha}},$$

$$(2) \qquad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\alpha}}.$$

Si l'on pose, dans la formule (1),

$$(3) \qquad \sin\omega = \sin\alpha \sin\varphi,$$

et, dans la formule (2),

$$(4) \qquad \sin\omega = \cos\alpha \sin\psi,$$

on aura

$$(5) \qquad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}},$$

$$(6) \qquad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}},$$

les angles φ_0, ψ_0, ω_0 ou φ_1, ψ_1, ω_1 devant satisfaire aux équations (3) et (4).

Si l'on fait $\omega_0 = 0$, on aura aussi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, et, en écrivant φ, ψ, ω au lieu de φ_1, ψ_1, ω_1, les équations (5) et (6) donneront

$$(7) \qquad F(\sin\alpha, \varphi) = \frac{a}{b^2}[s(\omega) + \sigma(\omega)],$$

$$(8) \qquad F(\cos\alpha, \psi) = \frac{a}{b^2}[s(\omega) - \sigma(\omega)].$$

Il résulte de là que toute fonction elliptique de première espèce est, quel que soit son module, exprimable par la somme ou par la différence de deux arcs de l'ovale de Cassini, de l'espèce que nous venons de considérer. Réciproquement, tout arc de cette courbe est exprimable au moyen de la somme de deux fonctions elliptiques de première espèce, dont les modules sont complémentaires. Ces modules ont pour valeurs

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Si dans l'équation (7) on pose $\omega = \alpha$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et qu'on désigne par S la longueur totale de la courbe, on aura

$$F_1(\sin\alpha) = \frac{a}{4b^2}S,$$

ce qui montre que la fonction complète de module $\sin\alpha$ est exprimable au moyen du périmètre entier de la courbe.

Dans le cas de $\frac{b}{a} = 1$, l'angle α est égal à $\frac{\pi}{2}$ et les arcs $\sigma(\omega)$ sont nuls; on retrouve le résultat connu relatif à la lemniscate.

567. Supposons $\frac{b}{a} > 1$ et posons $a^2 = b^2 \sin 2\alpha$; la courbe est composée d'une seule branche. Je désignerai par $s(\omega_0, \omega_1)$ l'arc déterminé par les rayons vecteurs qui répondent aux valeurs ω_0, ω_1 de ω, et par $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ l'arc que déterminent les rayons vecteurs perpendiculaires aux deux premiers. D'après cela, on aura

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}\, d\omega;$$

par suite, en supposant ω_0, ω_1 compris entre zéro et $\frac{\pi}{4}$,

$$(9)\quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

$$(10)\quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}\, d\omega,$$

Posons, dans l'équation (9),

$$(11)\quad \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha \sin^2\varphi}{\sin 2\alpha},$$

et, dans l'équation (10),

$$(12)\quad \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2\alpha \sin^2\psi}{\sin 2\alpha};$$

on aura

$$(13)\quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = b\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}};$$

$$(14)\quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = b\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi}};$$

les angles φ_0, ψ_0, ω_0 ou φ_1, ψ_1, ω_1 doivent satisfaire aux

équations (11) et (12), et, si l'on détermine l'angle ω' par la relation

$$\sin 2\omega' = \sin 2\alpha \sin 2\omega,$$

les équations (11) et (12) se réduiront à

$$\sin\varphi = \frac{\sin\omega'}{\sin\alpha}, \quad \sin\psi = \frac{\sin\omega'}{\cos\alpha}.$$

Si $\omega_0 = 0$, on a aussi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, et les équations (13) et (14) donnent

$$(15) \qquad F(\sin\alpha, \varphi) = \frac{1}{b}[s(\omega) + \sigma(\omega)],$$

$$(16) \qquad F(\cos\alpha, \psi) = \frac{1}{b}[s(\omega) - \sigma(\omega)].$$

Les modules de ces fonctions elliptiques sont encore complémentaires et ont pour valeurs

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Si l'on fait $\omega = \frac{\pi}{4}$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et l'équation (15) donne, en désignant par S le périmètre total de la courbe,

$$F_1(\sin\alpha) = \frac{S}{4b}.$$

On voit que l'on est conduit aux mêmes conséquences que dans le premier cas.

Des courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des fonctions elliptiques de première espèce.

568. La détermination de toutes les courbes algébriques dont les arcs peuvent représenter les fonctions

elliptiques de première espèce offre de très-grandes difficultés, et Legendre, qui s'est beaucoup occupé de cette recherche, n'a pu trouver aucune courbe possédant la propriété de la lemniscate. J'ai donné, il y a plusieurs années, la solution complète du problème, en me bornant toutefois au cas des courbes dont les coordonnées rectilignes peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles d'une même variable. J'ai été conduit ainsi à une infinité de classes distinctes renfermant chacune un nombre illimité de courbes individuelles dont les arcs représentent des intégrales elliptiques de modules différents. La discussion ultérieure des résultats obtenus a mis en évidence deux propriétés géométriques remarquables communes à toutes les courbes de la première classe, et qui peuvent servir à les définir; la théorie de ces courbes devient dès lors indépendante des considérations analytiques qui m'ont servi à les découvrir.

569. Théorème I. — *Soit n un nombre entier, ou fractionnaire, ou même incommensurable, et construisons le triangle* OMP *tel que*

$$\text{OP} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \text{MP} = \sqrt{n+1},$$

puis imaginons que, le sommet O *restant fixe, le triangle varie de telle sorte que le cosinus de l'angle ω formé par le seul côté variable* OM *avec une droite fixe soit constamment égal au cosinus de l'angle*

$$n\,\text{MOP} - (n+1)\,\text{OMP};$$

le point M *engendrera une courbe (algébrique si n est commensurable) dont l'arc sera exprimable en fonction du rayon vecteur, par une intégrale elliptique réductible au module $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.*

Soient, en effet, $MOP = \alpha$, $OMP = \beta$; l'équation de la courbe résultera de l'élimination de α et β entre

$$\cos\omega = \cos[n\alpha - (n+1)\beta],$$

$$\cos\alpha = \frac{\rho^2 - 1}{2\rho\sqrt{n}}, \quad \cos\beta = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho\sqrt{n+1}}.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$\sin\alpha = \frac{R}{2\rho\sqrt{n}}, \quad \sin\beta = \frac{R}{2\rho\sqrt{n+1}},$$

en faisant, pour abréger,

$$R = \sqrt{-\rho^4 + 2(2n+1)\rho^2 - 1}.$$

Cela posé, on trouve, par la différentiation,

$$\pm d\omega = n\,d\alpha - (n+1)\,d\beta,$$

$$d\alpha = -\frac{\rho^2 + 1}{R}\frac{d\rho}{\rho}, \quad d\beta = -\frac{\rho^2 - 1}{R}\frac{d\rho}{\rho},$$

d'où

$$\pm d\omega = \frac{\rho^2 - (2n+1)}{R}\frac{d\rho}{\rho},$$

et, par suite, on aura, pour la différentielle de l'arc,

$$\pm ds = 2\sqrt{n(n+1)}\frac{d\rho}{R}.$$

Des équations précédentes on déduit encore les formules suivantes, qu'il convient de remarquer :

$$\mp ds = \sqrt{n}\frac{d\alpha}{\cos\beta}, \quad \mp ds = \sqrt{n+1}\frac{d\beta}{\cos\alpha}.$$

On a d'ailleurs, en posant $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$,

$$\sin\beta = k\sin\alpha, \quad \cos\beta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha};$$

donc, en supposant que $d\rho$ ait le signe de $d\alpha$,

$$ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}},$$

et l'arc, compté à partir du point de l'axe polaire qui correspond à $\alpha = 0$, ou $\rho = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$, sera exprimé par l'intégrale elliptique de module k et d'amplitude α,

$$\sqrt{n}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On voit aisément que, dans le cas de $n = 1$, la courbe dont nous parlons se confond avec la lemniscate.

L'aire du triangle générateur OMP est $\frac{R}{4}$, et l'on trouve, d'ailleurs, aisément

$$\int \frac{1}{2}\rho^2 d\omega = \frac{R}{4} + \text{const.},$$

d'où l'on conclut que l'aire du secteur de courbe, comptée à partir de l'axe polaire, est toujours égale à l'aire du triangle générateur.

570. Je passe maintenant à l'examen de la seconde propriété de ces courbes remarquables. On a, dans le triangle OMP,

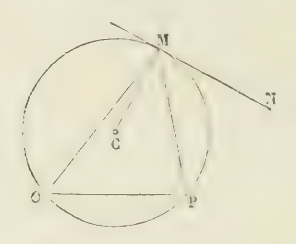
$$\rho^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos(\alpha + \beta),$$

d'où

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\rho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\frac{\rho\, d\omega}{ds},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm\frac{d\rho}{ds},$$

d'où l'on conclut que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur est précisément égale à $\alpha + \beta$ ou à son supplément; si donc on fait au point M un angle PMN = MOP, en supposant d'abord le premier cas, MN sera la normale au point M de la courbe, lequel correspond à la position OMP du triangle générateur; d'ailleurs le point O se trouve nécessairement sur le segment capable de l'angle PMN, que l'on décrirait sur MP, ce qui



montre que MN est tangente au cercle circonscrit au triangle générateur, et, si C est le centre du cercle circonscrit, le rayon MC sera précisément la tangente à la courbe. Il est d'ailleurs évident que, quand le sommet M du triangle décrira la courbe d'un mouvement continu, cette propriété se conservera pour toutes les positions de ce triangle.

On pourrait supposer que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur fût égale au supplément de $\alpha + \beta$; dans ce cas, on ferait tourner le triangle OMP autour de OM, on aurait un second triangle, qu'on pourrait substituer au premier, pour engendrer la courbe, et la propriété précédente serait alors relative à ce nouveau triangle.

De ce qui précède résulte le mode de génération suivant.

Théorème II. — *Si le triangle* OMP *varie de telle*

manière que le sommet O *reste fixe, et que les côtés mobiles* OP *et* MP *soient constamment égaux, le premier à* $\sqrt{n}$*, le second à* $\sqrt{n+1}$*, qu'en outre le déplacement infiniment petit* MM′ *du point* M *ait lieu à chaque instant suivant la droite qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle générateur, le point* M *engendrera la courbe elliptique qui répond au nombre* n.

CHAPITRE V.

DE LA CUBATURE DES SOLIDES ET DE LA QUADRATURE DES SURFACES COURBES. — DES INTÉGRALES MULTIPLES.

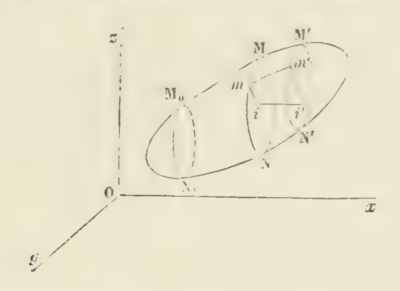
Volume d'un cylindre à base quelconque.

571. La base d'un cylindre peut être décomposée en éléments infiniment petits, soit par des parallèles à une direction donnée, soit par des rayons issus d'un point intérieur. Considérons le premier mode de décomposition ; chacun des éléments sera compris entre deux parallélogrammes qu'il est facile de construire, entre deux rectangles si l'on veut, dont le rapport aura pour limite l'unité. La base B du cylindre sera donc la limite de la somme des rectangles intérieurs ou de la somme des rectangles extérieurs. D'un autre côté, le volume V du cylindre, dont nous désignerons la hauteur par H, est compris entre la somme des prismes intérieurs de hauteur H et la somme des prismes extérieurs de même hauteur; d'ailleurs ces deux sommes de prismes tendent l'une et l'autre vers une limite égale au produit BH; donc on a $V = BH$.

Expression du volume de la portion d'un corps quelconque comprise entre deux plans parallèles.

572. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectilignes ; désignons par V le volume d'un segment d'un

corps quelconque, compris entre deux plans M_0N_0, MN parallèles au plan yz et répondant aux abscisses x_0 et x.



Si l'on suppose x_0 constante et x variable, le volume V sera une fonction de x dont il est aisé d'avoir la différentielle. A cet effet, considérons les sections faites dans le corps par les deux plans MN, M'N', parallèles à yOz, et qui correspondent aux abscisses x et $x + \Delta x$; ces deux plans comprennent entre eux le volume ΔV; nous représenterons par u l'aire de la section déterminée par le plan MN. Prenons un point i à l'intérieur de l'aire u, menons ii' parallèle à l'axe OX, et par ii' faisons passer un demi-plan quelconque $mii'm'$, qui rencontre les plans MN, M'N' suivant im, $i'm'$, et la surface du solide suivant la courbe mm'. Menons par tous les points de l'arc mm' des parallèles à mi, terminées à la droite ii'; soient l_1 la plus petite de ces droites, l_2 la plus grande. Concevons que l'on porte sur im les longueurs ip_1, ip_2 égales respectivement à l_1 et l_2. Si l'on fait tourner le demi-plan $mii'm'$ autour de la droite fixe ii', les deux points p_1 et p_2 décriront dans le plan MN deux courbes fermées dont nous représenterons les aires par u_1 et u_2.

La surface du corps étant une surface continue, il est évident que les aires u_1 et u_2 tendent vers u quand Δx tend vers zéro. Soit α l'angle que fait l'axe Ox

avec le plan $y\,O\,z$, la distance des plans MN, M′N′ sera $\Delta x \sin\alpha$. Construisons le cylindre qui a pour l'une de ses bases le contour de u_1, dont l'autre base est dans le plan M′N′, et dont les arêtes sont parallèles à Ox; construisons de même un deuxième cylindre avec le contour de u_2. Le volume ΔV est compris entre les volumes de ces deux cylindres, qui ont pour mesures

$$u_1 \sin\alpha\,\Delta x, \quad u_2 \sin\alpha\,\Delta x,$$

le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ est donc compris entre $u_1 \sin\alpha$ et $u_2 \sin\alpha$, et l'on a, en conséquence,

$$\frac{dV}{dx} = u \sin\alpha, \quad \text{ou} \quad dV = \sin\alpha\, dx.$$

D'après cela, si l'on donne à x une valeur déterminée X, le volume V du segment que nous considérons aura pour expression

$$V = \sin\alpha \int_{x_0}^{X} u\,dx,$$

u étant, nous devons le répéter, l'aire de la section faite dans le corps par le plan parallèle au plan yz, qui répond à l'abscisse x; dans le cas des axes rectangulaires, on a plus simplement

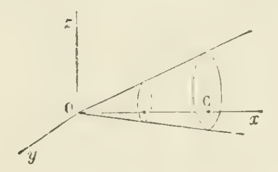
$$V = \int_{x_0}^{X} u\,dx.$$

Le résultat que nous venons d'obtenir suppose l'aire u connue en fonction de x; la détermination de cette aire exige elle-même une intégration; mais il y a des cas où cette intégration peut être effectuée immédiatement. Nous allons en présenter quelques exemples.

Application à quelques exemples.

573. Exemple I. — *Trouver le volume d'un cône à base quelconque.*

Prenons le sommet O du cône pour origine de trois coordonnées rectangulaires, et la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur la base pour axe des x.



Si l'on désigne par B la base du cône, par H sa hauteur, on aura, comme on sait,

$$\frac{u}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \quad u = \frac{B}{H^2}x^2,$$

et le volume V sera

$$V = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{B}{H^2} \times \frac{H^3}{3}$$

ou

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

574. Exemple II. — *Trouver le volume du segment d'un ellipsoïde compris entre deux plans parallèles.*

Rapportons l'ellipsoïde à trois diamètres conjugués Ox, Oy, Oz dont les deux derniers soient parallèles aux bases du segment; l'équation de la surface du corps sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b'^2\left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} + \frac{z^2}{c'^2\left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} = 1,$$

a', b', c' étant les demi-longueurs des diamètres conjugués. L'aire u est ici celle d'une ellipse dans laquelle deux diamètres conjugués ont pour longueurs les doubles des expressions

$$b'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}},\quad c'\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}};$$

en outre, l'angle de ces diamètres est égal à l'angle θ que forment les demi-diamètres b', c' de l'ellipsoïde. On a donc

$$u=\pi b'c'\sin\theta\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right),$$

et, par conséquent, si x_0, X désignent les valeurs de x qui répondent aux bases du segment, et que α soit l'angle formé par l'axe des x avec le plan yz, on aura

$$V=\pi b'c'\sin\theta\sin\alpha\int_{x_0}^{X}\left(1-\frac{x^2}{a'^2}\right)dx$$

ou

$$V=\pi b'c'\sin\theta\sin\alpha\left[(X-x_0)-\frac{X^3-x_0^3}{3a'^2}\right].$$

Pour avoir le volume entier de l'ellipsoïde, il faudra faire $x_0=-a'$, $X=+a'$, et il viendra

$$V=\frac{4}{3}\pi a'b'c'\sin\theta\sin\alpha;$$

si l'on prend pour a', b', c' les demi-axes a, b, c, on aura $\theta=90°$, $\alpha=90°$, et

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

La comparaison des deux formules précédentes donne

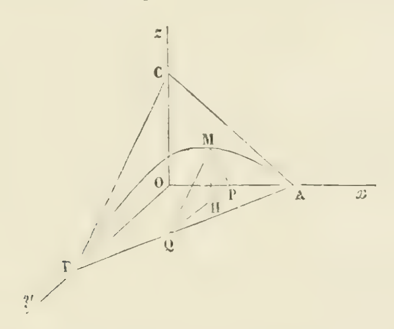
$$a'b'c'\sin\theta\sin\alpha=abc,$$

ce qui exprime le théorème connu, d'après lequel le

parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde a un volume constant.

Il est évident qu'on obtiendra, par un calcul analogue, le volume d'un segment d'hyperboloïde à une ou deux nappes, ou celui d'un segment de paraboloïde elliptique.

575. Exemple III. — *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, on demande de déterminer le volume compris dans l'angle des coordonnées positives et limité par le paraboloïde hyperbolique représenté par l'équation* $xy = az$, *a étant une constante, par le plan* ABC *qui a pour équation* $x + y + z = a$, *et par le plan des* x *et* y.



Le paraboloïde est coupé par le plan ABC suivant une hyperbole AMB, et il passe par l'axe des x, ainsi que par celui des y. Le plan PMQ, parallèle au plan yz, qui répond à l'abscisse x, coupe cette surface suivant une droite MP, et le plan ABC suivant une droite MQ parallèle à BC, trace du même plan ABC sur le plan yz; enfin il coupe le plan xy suivant la droite PQ parallèle à Oy. L'aire désignée par u au n° 572 est donc ici celle du triangle PMQ par lequel est engendré le volume qu'on demande d'évaluer.

La base PQ de ce triangle est l'ordonnée y, relative à

l'abscisse x, de la ligne AB trace du plan ABC sur le plan xy ; on a donc

$$PQ = a - x;$$

la hauteur MH du triangle PMQ est le z, relatif à l'abscisse x, de l'intersection du paraboloïde et du plan ABC ; l'élimination de y entre les équations des deux surfaces donne

$$x(a - x - z) = az;$$

ainsi l'on a

$$MH = \frac{x(a-x)}{a+x},$$

et, par conséquent, la valeur de u est

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{x(a-x)^2}{a+x}.$$

D'ailleurs le volume demandé V est limité par les plans qui répondent aux abscisses o et a ; donc on a

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}\,dx = \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3ax}{2} + 2a^2 - \frac{2a^3}{a+x}\right)dx,$$

et, en effectuant, on trouve

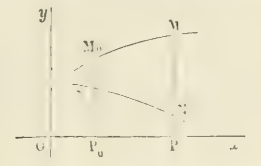
$$V = \left(\frac{17}{12} - \log 4\right)a^3.$$

Application aux solides de révolution.

576. L'aire désignée par u au n° 572 s'obtient immédiatement dans le cas très-étendu des solides de révolution autour de l'axe des x, puisque cette aire est celle d'un cercle ou de l'espace compris entre des cercles concentriques.

Soit M_0M une courbe donnée située dans le plan des xy et considérons le solide qu'engendre en tournant au-

tour de l'axe des x l'aire M_0P_0PM comprise entre la courbe M_0M, l'axe des x et les ordonnées M_0P_0, MP.



Dans ce cas, l'aire u sera celle d'un cercle de rayon y; on aura donc

$$u = \pi y^2, \quad V = \pi \int_{x_0}^{X} y^2 dx,$$

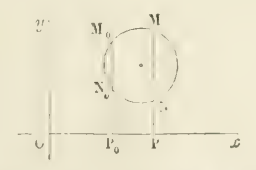
x_0 et X désignant les abscisses qui répondent aux ordonnées M_0P_0, MP.

Supposons qu'on demande le volume V engendré par l'aire M_0N_0NM comprise entre deux courbes données M_0M, N_0N et les ordonnées M_0P_0, MP. Soient y et y' les ordonnées des deux courbes; l'aire u sera celle de l'espace compris entre les cercles concentriques de rayons y et y'; on aura donc

$$u = \pi(y^2 - y'^2), \quad V = \pi \int_{x_0}^{X} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

577. Exemple I. — *Déterminer le volume du tore.*

Le tore est le solide engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan.



Rapportons le cercle générateur à deux axes rectangulaires dont l'un, celui des x, coïncide avec l'axe de révo-

lution; soient a le rayon du cercle, 6 l'ordonnée du centre, y, y' les ordonnées des points M, N qui répondent à la même abscisse x; on aura

$$y+y'=26,\quad y-y'=2\sqrt{a^2-x^2},\quad y^2-y'^2=46\sqrt{a^2-x^2},$$

puis, en supposant l'axe de rotation extérieur au cercle,

$$u=4\pi 6\sqrt{a^2-x^2},\quad V=4\pi 6\int_{x_0}^{X}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Or, si l'on désigne par v l'aire de la portion du cercle comprise entre les ordonnées M_0P_0, MP, qui répondent aux abscisses x_0, X, on a évidemment

$$v=\int_{x_0}^{X}(y-y')\,dx=2\int_{x_0}^{X}\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$$

donc le segment de tore sera

$$V=2\pi 6 v.$$

Si l'on veut avoir le volume total du solide, on fera $v=\pi a^2$, et l'on aura

$$V=2\pi^2 a^2 6.$$

578. Exemple II. — *Déterminer le volume engendré par la surface de la cycloïde tournant autour de sa base.*

Prenons pour axe des x la base de la cycloïde et pour axe des y la perpendiculaire menée par l'une des extrémités de cette base; la courbe sera définie (n° 230) par les équations

$$x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi),$$

d'où l'on tire

$$dx=a(1-\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Soit V le volume engendré par l'aire comprise entre la courbe, la base et l'ordonnée y qui répond à l'abscisse x

ou à l'angle φ; on aura

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi a^3 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi)^3 d\varphi;$$

or

$$(1 - \cos\varphi)^3 = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi;$$

donc

$$V = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}\varphi - \frac{15}{4}\sin\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi\right).$$

Si l'on veut le volume total du corps engendré par la cycloïde, on fera $\varphi = 2\pi$, et l'on aura

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

579. Exemple III. — *Déterminer le volume engendré par la surface de la cycloïde tournant autour de la tangente au sommet.*

La courbe étant rapportée aux mêmes axes que dans l'exemple précédent, soit V le volume engendré par la surface comprise entre la courbe, la tangente au sommet et la perpendiculaire $2a - y$ à cette tangente correspondant à l'angle φ; on aura

$$V = \pi \int_x^{\pi a} (2a - y)^2 dx = \pi a^3 \int_\varphi^\pi (1 + \cos\varphi)\sin^2\varphi\, d\varphi;$$

or

$$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \text{const.},$$

$$\int \cos\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \text{const.};$$

donc

$$V = \pi a^3 \left(\frac{\pi - \varphi}{2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right);$$

en faisant $\varphi = 0$, on aura le volume engendré par la

surface comprise entre la demi-cycloïde et la tangente ; si l'on double le résultat, on obtiendra le volume total, savoir

$$V = \pi^2 a^3.$$

V est ainsi le cinquième du volume considéré dans l'exemple précédent.

Considérations nouvelles relatives à la détermination du volume des corps terminés par des surfaces quelconques.

580. Revenons à la formule

$$(1) \qquad V = \int_{x_0}^{X} u\,dx$$

que nous avons établie au n° 572, pour le cas des coordonnées rectangulaires, et où V représente la portion du volume d'un corps comprise entre les plans parallèles au plan yz qui répondent aux abscisses x_0 et X. On peut toujours supposer que la surface, dont u désigne l'aire, est terminée par un contour qui n'est rencontré qu'en deux points par les droites parallèles à l'axe des z ; s'il en était autrement, on décomposerait le volume V en



plusieurs parties satisfaisant chacune à cette condition. Alors, si l'on désigne par Z et z_0 les ordonnées MP, m_0P parallèles aux z et qui répondent à une valeur OP = y de l'ordonnée parallèle aux y, que l'on représente en même temps par y_0 et Y les valeurs de y qui répondent aux

limites du contour de l'aire u, cette aire aura pour expression

$$(2) \qquad u = \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy,$$

et la formule (1) pourra être écrite comme il suit :

$$(3) \qquad V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy.$$

Dans cette formule (3), Z et z_0 sont des fonctions données de x et de y ; elles représentent les ordonnées z des deux points de la surface du corps qui répondent aux coordonnées x, y ; y_0 et Y sont des fonctions de la variable x ; elles représentent des ordonnées parallèles aux y et répondent à l'abscisse x du contour qui limite la projection du volume V sur le plan des xy ; enfin x_0 et X désignent des constantes données.

La formule (2) exprime, comme on sait, que l'on a

$$u = \lim \sum (Z - z_0)\, \Delta y,$$

x étant regardée comme constante et y variant de y_0 à Y par intervalles infiniment petits égaux à Δy ; on a de même, par la formule (1),

$$V = \lim \sum u\, \Delta x,$$

x variant ici de x_0 à X par intervalles égaux à Δx. On peut donc écrire

$$V = \lim \sum \Delta x \lim \sum (Z - z_0)\, \Delta y$$

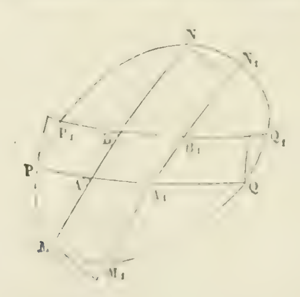
ou

$$(4) \qquad V = \lim \sum \sum (Z - z_0)\, \Delta x\, \Delta y.$$

L'expression (3) est dite une *intégrale double;* l'ex-

pression (4), qui en est une conséquence, montre que V est la limite vers laquelle tend la somme des prismes infiniment petits $(Z - z_0)\,\Delta x\,\Delta y$, dont les bases $\Delta x\,\Delta y$ forment une somme qui a pour limite l'aire suivant laquelle se projette le volume V sur le plan xy.

581. On peut arriver aux résultats qui précèdent par d'autres considérations qui permettront en même temps d'introduire plus de généralité. Désignons par V le volume d'une portion quelconque d'un corps rapporté à trois axes rectangulaires, et supposons, comme précédemment, ce que l'on peut toujours réaliser, que la surface du solide à évaluer ne soit rencontrée qu'en deux points par les droites parallèles aux z. Soient, comme au n° 580, Z et z_0 les valeurs de z relatives à cette surface. Nommons P l'aire suivant laquelle le volume V se projette sur le plan des xy, et décomposons cette aire en éléments infiniment petits dans tous les sens, d'après une loi quelconque. La décomposition dont je parle pourra être réalisée au moyen de deux familles de lignes dépendant chacune d'un paramètre variable ; deux courbes infiniment voisines MN, M_1N_1 de l'une des familles détermineront, avec deux courbes infiniment voisines PQ,



P_1Q_1 de l'autre famille, un quadrilatère $ABB_1A_1 = \varepsilon$ qui sera l'un des éléments que nous avons à considérer,

on aura

$$P = \sum \alpha + \sum \pm \alpha',$$

α' désignant un élément infiniment petit limité en partie par le contour de P.

Mais, les éléments α' étant compris entre deux courbes infiniment voisines du contour de P, la somme $\Sigma \pm \alpha'$ a pour limite zéro, il en résulte

$$P = \lim \sum \alpha;$$

et, conformément au principe du n° 9, on pourra encore négliger dans α toute quantité infiniment petite par rapport à cet élément.

Cela posé, le cylindre qui a α pour base et dont les arêtes sont parallèles à l'axe des z intercepte, dans le volume V, un élément qu'on peut représenter par $\alpha(Z - z_0 + \varepsilon)$ en désignant par ε un infiniment petit; il en est de même des cylindres qui répondent aux éléments excédants α' et auxquels répondent des éléments solides $\alpha'(Z' - z'_0 + \varepsilon')$. On a ainsi

$$V = \sum \alpha(Z - z_0 + \varepsilon) + \sum \alpha'(Z' - z'_0 + \varepsilon');$$

la deuxième somme a zéro pour limite, puisque $\sum \alpha'$ tend vers zéro; la somme $\sum \alpha\varepsilon$ a aussi zéro pour limite (n° 9), et l'on a

(5) $$V = \lim \sum \alpha(Z - z_0).$$

582. Supposons que les éléments α soient déterminés par une série de lignes parallèles à l'axe des x et par une

deuxième série de lignes parallèles à l'axe des y; on aura

$$\alpha = \Delta x \Delta y,$$

et par conséquent

$$V = \lim \sum (Z - z_0) \Delta x \Delta y.$$

Pour avoir V, d'après cette formule, on peut commencer par prendre la limite de la somme des éléments $(Z - z_0) \Delta x \Delta y$, en supposant x et Δx constants. Cette limite sera égale à $\Delta x \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0) dy$, si l'on suppose que le contour de l'aire P ne soit rencontré qu'en deux points m_0, M par les parallèles aux y, et que l'on désigne par y_0, Y les ordonnées de ces deux points. On a ainsi



l'élément du volume V qui se projette sur la partie $M m_0 m'_0 M'$ de l'aire P, partie qui est comprise entre deux parallèles à l'axe des y répondant aux abscisses x et $x + \Delta x$. Maintenant soient x_0 et X les abscisses correspondant aux ordonnées $\mu\varpi$, $\nu\psi$, auxquelles se termine le contour de l'aire P; il restera à prendre la limite de la somme des éléments que nous venons de déterminer quand x varie de x_0 à X par intervalles égaux à Δx; on

aura ainsi cette expression de V

$$(6)\qquad V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy.$$

Au lieu d'opérer comme nous l'avons fait, on peut commencer par faire la somme des éléments $(Z - z_0)\,\Delta x\,\Delta y$ en supposant y et Δy constants; on obtient ainsi $\Delta y \int_{x'_0}^{X'} (Z - z_0)\,dx$, les limites x'_0 et X' étant les abscisses des points du contour de l'aire P qui répondent à l'ordonnée y ; ensuite, en désignant par y'_0 et Y' les ordonnées correspondant aux abscisses auxquelles se termine le contour de l'aire P, on aura, pour le volume V,

$$(7)\qquad V = \int_{y'_0}^{Y'} dy \int_{x'_0}^{X'} (Z - z_0)\, dx.$$

Si l'aire P est celle d'un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes des x et des y, il est évident que l'on aura

$$x'_0 = x_0,\quad X' = X,\quad y'_0 = y,\quad Y' = Y,$$

et conséquemment

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} (Z - z_0)\, dx,$$

d'où l'on conclut ce théorème, déjà établi (n° 481), savoir :

Lorsqu'il s'agit d'intégrer l'expression $(Z - z_0)\,dx\,dy$ entre les limites x_0, X de x et entre les limites y_0, Y de y, on peut exécuter les opérations dans un ordre quelconque, pourvu que les limites relatives à chaque intégration soient indépendantes de la variable à laquelle se rapporte l'autre intégration.

583. Détermination du volume total d'un corps. — Nous supposerons que la surface du corps ne soit rencontrée par une droite qu'en deux points ; le cas contraire peut facilement se ramener à cette hypothèse. L'aire P est évidemment ici la trace sur le plan xy du cylindre parallèle aux z et circonscrit à la surface du corps ; c'est aussi ce que l'on nomme le *contour apparent* du corps sur le plan xy. Les ordonnées z_0, Z seront données par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

qui appartient à la surface du corps ; les points de cette surface où le plan tangent est parallèle à l'axe des z satisfont à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

et l'élimination de z entre les deux précédentes équations fera connaître l'équation

$$f(x, y) = 0$$

du contour de l'aire P ; c'est de cette dernière équation qu'on tirera les valeurs de y_0 et de Y. Quant aux limites x_0 et X de l'intégration relative à x, elles sont les abscisses des deux points de la surface du corps où le plan tangent est parallèle au plan yz, et l'on a, pour ces points, les trois équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

584. Supposons que les éléments α du n° 581 soient déterminés par une famille de circonférences ayant pour centre l'origine des coordonnées et par les rayons issus de cette origine. Soient ρ et $\rho + \Delta\rho$ les rayons de deux circonférences infiniment voisines, ω, $\omega + \Delta\omega$ les angles

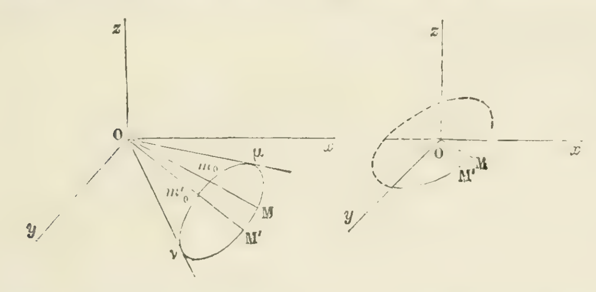
de deux rayons infiniment voisins ; on aura

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[(\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2\right]\Delta\omega,$$

et l'on peut écrire, en négligeant $\Delta\rho^2$,

$$V = \lim \sum (Z - z_0)\,\rho\,\Delta\rho\,\Delta\omega.$$

Commençons par prendre la limite de la somme des éléments $(Z - z_0)\,\rho\,\Delta\rho\,\Delta\omega$, en supposant ω et $\Delta\omega$ constants. Si l'origine des coordonnées est extérieure à



l'aire P, et que les rayons issus de cette origine ne rencontrent le contour qu'en deux points, le résultat sera $\Delta\omega \int_{\rho_0}^{R} (Z - z_0)\,\rho\,d\rho$, et il exprimera l'élément du volume V projeté sur la partie $m_0 M M' m'_0$ que déterminent dans l'aire P les rayons correspondants aux angles ω, $\omega + \Delta\omega$. Il reste à prendre la limite vers laquelle tend la somme de ces éléments quand ω varie par degrés égaux à $\Delta\omega$ entre les limites ω_0, Ω qui répondent aux rayons $O\mu$, $O\nu$ auxquels se termine l'aire P. On a ainsi

$$V = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_{\rho_0}^{R} (Z - z_0)\,\rho\,d\rho.$$

Si l'origine des coordonnées est dans l'intérieur de l'aire P, il est évident que la première intégration devra

être faite à partir de zéro jusqu'à la valeur R qui convient au contour de P, et que les limites de la deuxième intégration seront o et 2π. On a ainsi

$$V = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R (Z - z_0)\rho\, d\rho.$$

583. Exemple I. — Je prendrai pour premier exemple de la théorie qui précède le problème que nous avons déjà résolu au n° 575. Il s'agit de déterminer le volume V compris entre les surfaces dont les équations sont, en coordonnées rectangulaires,

$$az = xy, \quad x + y + z = a, \quad z = 0,$$

L'aire P est évidemment ici celle du triangle rectangle formé par l'axe des x, l'axe des y et la trace du plan $x + y + z = a$ sur le plan xy; cette trace a pour équation $x + y = a$, et l'on a

$$y_0 = 0, \quad Y = a - x, \quad x_0 = 0, \quad X = a.$$

L'ordonnée z_0 est nulle, c'est la valeur fournie par la troisième des équations précédentes; les deux autres donnent

$$z = \frac{xy}{a}, \quad z = a - x - y,$$

et la plus petite de ces deux valeurs de z doit évidemment être prise pour Z dans la formule

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} Z\, dy.$$

Ainsi l'on a $Z = \frac{xy}{a}$ tant que

$$\frac{xy}{a} < a - x - y \quad \text{ou} \quad y < \frac{a(a-x)}{a+x},$$

et, au contraire, $Z = a - x - y$ tant que

$$\frac{xy}{a} > a - x - y \quad \text{ou} \quad y > \frac{a(a-x)}{a+x};$$

par conséquent,

$$\int_0^{a-x} Z\,dy = \int_0^{\frac{a(a-x)}{a+x}} \frac{xy}{a}\,dy + \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{a-x} (a-x-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{ax(a-x)^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2(a-x)^2}{(a+x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x(a-x)^2}{a+x},$$

et

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x}\,dx = \left(\frac{17}{12} - \log 4\right) a^2,$$

comme on l'a déjà trouvé au n° 575. On voit que le volume V se compose de deux parties, dont l'une est limitée par le paraboloïde donné, l'autre par le plan donné.

586. Exemple II. — *Étant donné le cylindre dont l'équation est $y^2 + x^2 - Rx = 0$ en coordonnées rectangulaires, on demande le volume de la partie comprise entre le plan xy et la sphère dont l'équation est $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.*

Si l'on introduit les coordonnées polaires ρ et ω au lieu de x et y, la sphère aura pour équation

$$z^2 = R^2 - \rho^2,$$

et l'équation de la trace du cylindre sera

$$\rho = R\cos\omega.$$

L'expression du volume demandé sera donc, en n'en

prenant d'abord que la moitié et en doublant ensuite,

$$V = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_{0}^{R\cos\omega} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho;$$

l'intégrale $\int \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho$ est égale à

$$-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const.};$$

donc

$$V = \frac{2}{3}R^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int^{\pi} {}_{\pi} (1 - \sin\omega + \sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega;$$

on a

$$\int (1 - \sin\omega + \sin\omega\cos^2\omega)\,d\omega = \omega + \cos\omega - \frac{1}{3}\cos^3\omega + \text{const.};$$

donc

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{4}{9}R^3.$$

L'excès de la demi-sphère $\frac{2}{3}\pi R^3$ sur la partie $2V$ du cylindre indéfini comprise dans son intérieur est donc égale à $\frac{8}{9}R^3$.

Sur l'application des formules précédentes à des questions diverses.

587. La considération des volumes peut être employée avec avantage dans la solution de questions diverses; on en a vu un exemple au n° 582, où nous avons rencontré

naturellement une démonstration nouvelle et fort simple de la règle de l'intégration sous le signe $\int$, déjà précédemment établie ; nous présenterons ici deux autres exemples.

Comme premier exemple, nous indiquerons le procédé dont Poisson a fait usage pour déterminer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

dont nous nous sommes déjà occupé au n° 497, et qui n'est autre chose que l'intégrale eulérienne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si l'on multiplie la précédente intégrale par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy,$$

on aura un produit égal à $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$, qui ne sera autre chose que l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy.$$

Cette intégrale double exprime le volume indéfini compris entre la surface dont l'équation est en coordonnées rectangulaires $z = e^{-x^2-y^2}$ et le plan xy. Or, si l'on substitue aux coordonnées x, y les coordonnées polaires ρ, ω, l'équation de la surface sera $z = e^{-\rho^2}$, et le volume que nous considérons aura pour expression

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho.$$

L'intégrale relative à ρ étant indépendante de ω, on peut

écrire

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi} d\omega \times \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho;$$

le premier facteur a pour valeur 2π, le second est égal à $\frac{1}{2}$; on a donc

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

comme on l'a déjà trouvé par d'autres considérations.

588. Comme deuxième exemple, nous nous proposerons de démontrer une formule curieuse, dont Lejeune-Dirichlet a fait usage dans un de ses Mémoires; cette formule est la suivante :

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\,dx;$$

$f(x, y)$ y désigne une fonction quelconque qui reste finie entre les limites des intégrations. Il s'agit donc ici d'une intégrale double dans laquelle l'intégration relative à y doit être effectuée entre des limites qui ne sont pas toutes deux indépendantes de l'autre variable, et où l'on peut cependant intervertir l'ordre des deux intégrations. Pour démontrer la formule de Dirichlet, il suffit de considérer x, y et $f(x, y)$ comme les trois coordonnées rectangulaires d'une surface; alors on voit de suite que chacune des deux intégrales doubles exprime le volume compris entre la surface dont nous venons de parler, le plan des xy et les trois plans perpendiculaires à ce dernier, dont les équations sont $y = 0$, $x = a$, $y = x$.

De l'aire des surfaces courbes.

589. On ne peut comparer à une ligne droite qu'une autre ligne droite ou une somme de telles lignes; aussi

nous avons dû définir avec précision, dans le Calcul différentiel, la longueur rectiligne qu'on nomme *longueur d'un arc de courbe*. Nous emploierons ici des considérations analogues pour définir ce que nous entendons par *aire* d'une portion déterminée de surface courbe.

On peut toujours supposer que la portion de surface courbe dont il s'agit soit limitée par un contour, car, si le contraire avait lieu, et qu'il fût question de la surface totale d'un corps, on serait dans le cas d'un contour infiniment petit; d'ailleurs rien n'empêcherait de décomposer la surface en deux ou en un plus grand nombre de parties; ce que nous allons dire de chaque partie s'appliquera alors naturellement à l'aire totale, qui sera la somme de ces parties.

Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C; *nous nommerons aire de cette surface la limite* S *vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal* Γ *ayant pour limite le contour* C.

Il faut démontrer que la limite S existe et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les faces de la surface polyédrale inscrite.

Nous rapporterons la surface à trois axes rectangulaires, et nous choisirons le plan xy de manière qu'il ne soit perpendiculaire à aucun des plans tangents menés à la surface par les points situés sur le contour C ou dans l'intérieur de ce contour; on peut toujours procéder ainsi en décomposant, s'il est nécessaire, la portion de surface considérée en plusieurs parties, et en regardant l'aire totale comme égale à la somme des aires des parties. Cela posé, soit C' la projection du contour C sur le plan des xy; inscrivons dans le contour C' un polygone Γ' dont

les côtés soient tous infiniment petits, et décomposons ce polygone Γ' en éléments triangulaires α dont les trois côtés soient infiniment petits. Les arêtes du prisme triangulaire qui a pour base α, et dont les arêtes sont parallèles à l'axe des z, rencontreront la surface courbe en trois points, et, si l'on joint ces points deux à deux, on obtiendra un triangle qui sera l'une des faces de la surface polyédrale que nous voulons inscrire; l'aire de ce triangle sera égale à $\frac{\alpha}{\cos\theta}$, θ étant l'angle que forme le plan du triangle avec le plan xy. D'après cela, si l'on désigne par P l'aire totale de la surface polyédrale inscrite, on aura

$$P = \sum \frac{\alpha}{\cos\theta}.$$

Mais, si l'on nomme ζ l'angle que forme avec le plan xy le plan tangent mené à la surface par l'un des sommets du triangle inscrit dont l'aire est $\frac{\alpha}{\cos\theta}$, il est évident que l'on aura

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\zeta}(1+\varepsilon),$$

ε désignant un infiniment petit; on peut donc écrire

$$(1) \qquad P = \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta} + \sum \varepsilon \frac{\alpha}{\cos\zeta}.$$

L'ordonnée z de notre surface est une fonction déterminée des variables x et y; $\cos\zeta$ est aussi une fonction des deux mêmes variables. Considérons alors la surface dont l'ordonnée Z a pour valeur

$$Z = \frac{1}{\cos\zeta};$$

désignons, en outre, par V le volume limité par cette surface et par le plan xy dans le cylindre parallèle à l'axe des z et qui a pour base C'; on aura (n° 581)

$$(2) \qquad V = \lim \sum Z\alpha = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta}.$$

Donc la première des sommes de la formule (1) a pour limite V; il s'ensuit (n° 9) que la deuxième somme a zéro pour limite, et l'on a, en conséquence,

$$(3) \qquad \lim P = V \quad \text{ou} \quad S = V,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

590. Mais la formule (2) subsiste (n° 581) quelle que soit la figure des aires infiniment petites α; on aura donc, pour toute décomposition de l'aire C' en éléments α infiniment petits dans tous les sens,

$$(4) \qquad S = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos\zeta}.$$

Soient ζ_0 et ζ_1 la plus grande et la plus petite des valeurs de ζ pour les différents points situés dans l'intérieur du contour C; la formule précédente donnera

$$S = \frac{1}{\cos\zeta'} \lim \sum \alpha = \frac{A}{\cos\zeta'},$$

en désignant par ζ' un angle compris entre ζ_0 et ζ_1, et par A l'aire limitée par le contour C'. Supposons que l'aire A se réduise à un élément α infiniment petit dans tous les sens; S se réduira aussi à un élément infiniment petit σ, et l'on aura

$$\sigma = \frac{\alpha}{\cos\zeta'}.$$

Soit ζ l'angle formé avec le plan des xy par le plan tan-

gent en un point quelconque de l'élément σ; on aura

$$\frac{1}{\cos\zeta'} = \frac{1}{\cos\zeta}(1+\varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit; donc

$$(5) \qquad \sigma = \frac{\alpha}{\cos\zeta}(1+\varepsilon).$$

Il faut remarquer que la formule (4) subsiste lors même que le plan tangent de la surface proposée serait, en quelques points du contour C, perpendiculaire au plan xy; en effet, cette circonstance n'aura plus lieu si l'on substitue au contour C un autre contour C_0 infiniment voisin, convenablement choisi; désignant alors par S_0 l'aire comprise dans le nouveau contour et par V_0 le volume déterminé comme on l'a expliqué au n° 589, on aura

$$S_0 = V_0;$$

cette égalité subsiste quand le contour C_0 varie et tend vers la limite C; d'ailleurs S_0 tend alors vers la limite S; on obtient donc l'égalité (3) en passant à la limite. Quelle que soit l'aire terminée par le contour C, on peut toujours la décomposer en parties telles que le plan tangent de la surface ne soit perpendiculaire au plan xy que pour des points situés sur les contours partiels; il en résulte que la formule (4) convient à tous les cas.

591. Appliquons ce qui précède au cas d'une surface définie par son équation entre trois coordonnées rectangulaires x, y, z. Soit

$$(6) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

p et q étant des fonctions données de x et y; on aura (n° 254)

$$\frac{1}{\cos\zeta} = \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Supposons, ce qu'il est toujours possible de réaliser, que le contour C′ de la projection de l'aire S à évaluer ne soit rencontré qu'en deux points par les parallèles aux y ; alors l'aire S, égale au volume V, aura pour expression (n° 582)

$$(7)\qquad S = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy;$$

y_0 et Y désignent les ordonnées y du contour C′ qui répondent à l'abscisse x; x_0 et X sont les abscisses correspondant aux ordonnées qui limitent le contour. On peut écrire aussi

$$(8)\qquad S = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx;$$

mais ici x_0 et X désignent les abscisses des deux points du contour qui répondent à un même y, tandis que y_0 et Y sont les ordonnées correspondant aux deux abscisses qui limitent le contour C′.

592. Il est quelquefois avantageux de substituer aux coordonnées x, y les coordonnées polaires ρ, ω. On a

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega,$$

et l'on peut prendre $\rho\,\Delta\rho\,\Delta\omega$ pour l'élément α (n° 584). Alors, si l'origine des coordonnées est extérieure au contour C′, et que chaque rayon ρ ne rencontre le contour qu'en deux points, on aura

$$(9)\qquad S = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_{\rho_0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\cos\zeta},$$

ρ_0 et R étant les rayons des points du contour C′ qui répondent à une même valeur de ω, et ω_0, Ω désignant les valeurs de ω qui répondent aux rayons limites du contour. Cette formule est encore applicable au cas où le

contour C′ serait formé de deux contours partiels intérieurs l'un à l'autre, l'origine étant dans l'intérieur du plus petit contour et la surface S à évaluer ayant pour projection l'espace compris entre les deux contours; dans ce cas, on a évidemment $\omega_0 = 0$, $\Omega = 2\pi$ et

$$(10)\qquad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\rho_0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\cos\zeta}.$$

Si le plus petit des deux contours dont on vient de parler se réduit à l'origine des coordonnées, on a $\rho_0 = 0$, et la formule (10) devient

$$(11)\qquad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\cos\zeta}.$$

Le cosinus de l'angle ζ s'exprime facilement en fonction des dérivées partielles de z par rapport à ρ et ω. On a

$$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\, d\omega,\qquad dy = d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\, d\omega;$$

la formule (6) donne alors

$$\frac{\partial z}{\partial\rho} = p\cos\omega + q\sin\omega,\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\omega} = -p\sin\omega + q\cos\omega;$$

élevant au carré et ajoutant, il vient

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2 = p^2 + q^2,$$

par suite

$$\frac{\rho}{\cos\zeta} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2}.$$

On a donc

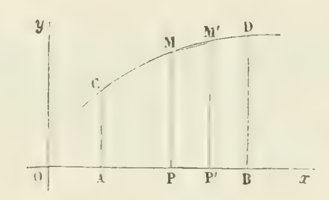
$$(12)\qquad S = \int\!\!\int \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\right)^2}\, d\rho\, d\omega,$$

en se dispensant d'indiquer les limites des intégrales, afin d'embrasser tous les cas.

Cas des surfaces de révolution.

593. Dans le cas des surfaces de révolution, l'intégrale double qui exprime l'aire de la zone comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe se réduit immédiatement à une intégrale simple.

Soit CMD une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy situés dans un plan, et supposons que l'on demande l'aire S de la zone engendrée par l'arc CD tournant autour de l'axe des x. Considérons d'abord le cas



où l'ordonnée y de la courbe est constamment croissante ou décroissante quand on passe d'une extrémité à l'autre de l'arc CD; l'aire demandée S aura pour projection, sur le plan perpendiculaire à Ox, l'espace compris entre les deux cercles décrits de l'origine comme centre avec les ordonnées $CA = y_0$, $DB = Y$ des extrémités de l'arc. On peut donc appliquer ici la formule (10) du n° 592 en écrivant y au lieu de ρ et en prenant pour ζ l'angle du plan tangent à la surface avec le plan perpendiculaire à Ox; on a ainsi

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta}.$$

Or, par la nature de la surface, ζ ne dépend pas de ω; on peut donc faire sortir le facteur $\int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta}$ du signe $\int$

relatif à ω, et l'on a

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \times \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta} = 2\pi \int_{y_0}^{Y} \frac{y\,dy}{\cos\zeta};$$

le plan tangent d'une surface de révolution étant perpendiculaire au plan de la courbe méridienne, ζ est l'angle formé par la tangente de cette méridienne avec l'axe des y : par conséquent, $\cos\zeta = \pm \frac{dy}{ds}$, ds étant la différentielle de l'arc de la courbe. On a ainsi

$$S = \pm 2\pi \int_{y_0}^{Y} y \frac{ds}{dy} dy,$$

le signe $\pm$ devant être remplacé par le signe de $Y - y_0$; si x_0 et $X > x_0$ désignent les abscisses qui répondent aux ordonnées y_0, Y, on pourra écrire aussi

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \frac{ds}{dx} dx.$$

Il est évident que cette dernière formule subsistera quel que soit l'arc de courbe CD, car on peut toujours décomposer l'arc CD en parties telles que de l'une des extrémités à l'autre de chaque partie l'ordonnée varie dans le même sens. Notre formule s'appliquant à chaque partie, elle s'applique aussi à leur somme.

594. On peut établir directement la formule que nous venons d'obtenir. Effectivement, inscrivons dans l'arc CD une ligne polygonale dont les côtés soient infiniment petits. Chacun de ces côtés MM′ engendrera un tronc de cône; inscrivons dans chaque tronc de cône une surface polyédrale formée de faces quadrangulaires dont deux côtés soient des arêtes infiniment voisines du tronc de cône; chacune de ces faces étant ensuite décomposée en triangles par une diagonale, nous aurons une surface po-

lyédrale qui sera inscrite à la fois dans la surface de révolution proposée et dans la surface composée des troncs de cône inscrits. Il résulte de là que la surface demandée S est égale à la limite de la somme des surfaces des troncs de cône. Or, si x, y désignent les coordonnées du point M, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ celles du point M′, la surface engendrée par MM′ sera

$$2\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ou

$$2\pi y \frac{ds}{dx} \Delta x (1 + \varepsilon),$$

en désignant par s l'arc de la courbe et par ε un infiniment petit. D'après cela, on a

$$S = \lim \sum 2\pi y \frac{ds}{dx} \Delta x$$

ou

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \frac{ds}{dx}\, dx.$$

595. Aire de l'ellipsoïde de révolution. — Cherchons l'aire d'une zone de l'ellipsoïde de révolution. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'ellipse qui engendre la surface en tournant autour de l'axe des x; on a

$$y \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}.$$

L'aire engendrée par l'arc compris entre l'extrémité du demi-axe b et le point qui répond à l'abscisse x sera

$$S = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}\, dx;$$

il convient de distinguer les cas de $a > b$ et de $a < b$.

Si $a > b$, l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe; on a

$$2\int_0^x \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2};$$

donc

$$S = \frac{\pi b x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2}.$$

Si l'on veut l'aire totale de l'ellipsoïde, il faut faire $x = a$ et doubler ensuite le résultat; il vient ainsi

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a},$$

ou, en posant $b = a\cos\frac{\gamma}{2}$,

$$S = 2\pi b^2\left(1+\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right).$$

Si $b = a$, $\gamma = 0$, l'ellipsoïde se réduit à une sphère, et l'on retrouve la formule connue $S = 4\pi a^2$.

Supposons en second lieu $a < b$; dans ce cas l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, et l'expression de S est

$$S = \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^x \sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,dx$$

ou

$$S = \frac{\pi b x\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{x\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a^2};$$

faisant $x = a$ dans cette formule, et multipliant ensuite

par 2, on obtient l'aire totale de l'ellipsoïde, savoir

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a};$$

si l'on pose

$$b = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right),$$

la formule précédente deviendra

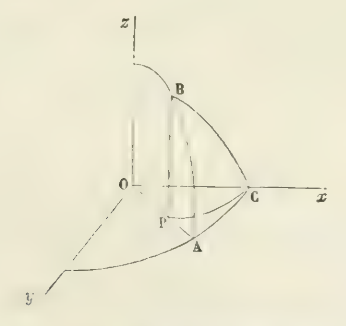
$$S = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{\gamma}{\frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma})} \right],$$

ce qui, pour $b = a$ ou $\gamma = 0$, se réduit à $4\pi a^2$, expression relative à la sphère.

Applications de la méthode pour la détermination de l'aire des surfaces courbes quelconques.

596. Problème I. — *Trouver l'aire d'un triangle sphérique.*

Un triangle sphérique pouvant se décomposer en deux triangles rectangles par un arc de grand cercle abaissé



d'un sommet perpendiculairement sur le côté opposé, il nous suffira d'examiner le cas du triangle rectangle.

Soit le triangle sphérique ABC, rectangle en A, que nous rapporterons à trois axes rectangulaires passant par le centre de la sphère ; nous prendrons pour plan des xy le plan du côté AC, et nous ferons passer l'axe des x par le sommet C. La ligne OA est la trace du plan du côté AB sur le plan xy, et, si l'on abaisse du sommet B la perpendiculaire BP sur OA, l'arc de cercle BC se projettera suivant un arc d'ellipse CP; il s'agit donc de trouver l'aire de la portion de sphère qui se projette à l'intérieur du triangle curviligne ACP.

L'équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

et celle du plan du côté BC est

$$z = y \tang C,$$

C étant l'angle au sommet du même nom dans le triangle. En éliminant z entre les deux équations précédentes, on a l'équation de l'ellipse CP, savoir

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 C} = R^2,$$

d'où l'on tire, en remplaçant x et y par les valeurs $\rho_0 \cos\omega$, $\rho_0 \sin\omega$,

$$\rho_0 = \frac{R \cos C}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2 \omega}}.$$

Le cosinus de l'angle que fait le plan tangent de la sphère avec le plan xy est $\frac{z}{R}$ ou $\frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R}$, et l'élément de la surface sphérique est $\frac{R \rho\, d\rho\, d\omega}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$. L'intégration relative à ρ doit être faite depuis la valeur ρ_0, qui convient à l'ellipse, jusqu'à $\rho = R$; celle relative à ω doit être faite

depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \frac{b}{R}$, b étant la longueur du côté AC; ainsi l'expression de l'aire demandée S est

$$S = \int_0^{\frac{b}{R}} d\omega \int_{\rho_0}^{R} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

On a

$$\int_{\rho_0}^{R} \frac{R\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R\sqrt{R^2 - \rho_0^2} = \frac{R^2 \sin C \sin\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2\omega}},$$

donc

$$S = \int_0^{\frac{b}{R}} \frac{R^2 \sin C \sin\omega\, d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2\omega}}.$$

L'intégrale indéfinie de la différentielle sous le signe $\int$ est $-R^2 \arcsin(\sin C \cos\omega) + \text{const.}$; on a donc

$$S = R^2\left[C - \arcsin\left(\sin C \cos\frac{b}{R}\right)\right];$$

mais, par les formules de la Trigonométrie sphérique, $\sin C \cos\frac{b}{R}$ est égal à $\cos B$ ou à $\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, et, par suite,

$$S = R^2\left(B + C - \frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui est la formule connue.

597. Problème II. — *Étant donnée la sphère qui a pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

trouver l'aire de la portion de cette sphère qui se projette sur le plan xy, dans l'intérieur de la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \text{tang}^2\omega)}.$$

L'élément de la surface sphérique est, comme dans le problème précédent, et à cause de $R = 1$,

$$\frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

La courbe donnée est symétrique par rapport aux axes des x et des y; il suffit donc de déterminer l'aire sphérique qui se projette sur l'un de ses quadrants, celui qui répond aux valeurs de ω comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Le rayon vecteur de cette courbe est plus grand que 1 pour les valeurs de ω comprises entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, mais il est inférieur à 1 pour les valeurs de ω comprises entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$: donc l'aire que nous avons à évaluer se compose de deux parties, savoir celle qui se projette sur le secteur circulaire dont l'angle est $\frac{\pi}{6}$, et celle qui se projette sur le segment de la courbe donnée dont la corde fait, avec l'axe des x, l'angle $\frac{\pi}{6}$. Pour la première partie, les intégrations devront être faites de $\rho = 0$ à $\rho = 1$ et de $\omega = 0$ à $\omega = \frac{\pi}{6}$; pour la deuxième partie, l'intégration relative à ρ doit être faite de $\rho = 0$ à $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \text{tang}^2\omega)}$ et celle relative à ω de

$\omega = \frac{\pi}{6}$ à $\omega = \frac{\pi}{4}$. On a ainsi

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\omega \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\tang^2\omega)}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{3}{2}\tang^2\omega - \frac{1}{2}}\, d\omega;$$

or

$$\int \sqrt{\frac{3}{2}\tang^2\omega - \frac{1}{2}}\, d\omega = \int \frac{\frac{3}{2}\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{\sqrt{\frac{3}{2}\tang^2\omega - \frac{1}{2}}} - \int \frac{2\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{2\sin^2\omega - \frac{1}{2}}}.$$

La première intégrale a pour valeur

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\log\left(\tang\omega + \sqrt{\tang^2\omega - \frac{1}{3}}\right) + \text{const.},$$

et la seconde

$$\sqrt{2}\log\left(\sin\omega + \sqrt{\sin^2\omega - \frac{1}{4}}\right) + \text{const.};$$

on conclut de là

$$S = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{\frac{3}{2}}\log(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

Formule générale pour la détermination de l'aire des surfaces.

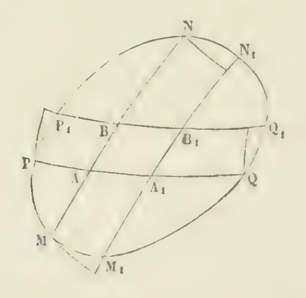
598. Considérons d'abord le cas d'une aire plane limitée par un contour C, et supposons que les équations

(1) $$u = \alpha, \quad v = \beta,$$

dans lesquelles u et v désignent deux fonctions des coordonnées x et y, α et β deux paramètres variables, représentent deux séries de lignes telles que par chaque point de l'intérieur du contour C on puisse mener une ligne de chaque système; nous admettrons que ces lignes ne rencontrent le contour C qu'en deux points. Les équations (1), résolues par rapport à x et y, donnent

$$(2)\qquad x = f(\alpha, \beta), \quad y = f_1(\alpha, \beta).$$

On obtient une ligne de la première série en faisant varier dans ces formules le paramètre β, après avoir attribué à α une valeur déterminée, de même la variation de α, le paramètre β demeurant fixe, donne une ligne de la seconde série. Divisons, comme au n° 581, l'aire S en



parties infiniment petites dans tous les sens au moyen des lignes α et β; l'aire S sera la limite de la somme des quadrilatères ABA_1B_1 déterminés par les lignes qui correspondent aux valeurs α, $\alpha + \Delta\alpha$, β, $\beta + \Delta\beta$ des deux paramètres. Pour évaluer l'aire du quadrilatère ABA_1B_1, nous supposerons d'abord que les accroissements $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre, mais que leur rapport reste voisin d'un nombre fixe, de l'unité par exemple; alors, $\Delta\alpha$ étant pris pour infiniment petit principal, $\Delta\beta$ sera du premier ordre. Menons

au point A la tangente à la courbe AA_1, que l'on obtient par la variation du paramètre α; la distance de chaque point de cet arc à la tangente en A est une quantité du second ordre, et l'arc est compris entre deux parallèles à la tangente, dont la distance est du second ordre. Pareillement, l'arc BB_1 est compris entre deux parallèles à la tangente en B à cet arc, et dont la distance est aussi du second ordre. Remarquons maintenant que l'angle des tangentes en A et B, étant du premier ordre par rapport à $\Delta\beta$, est encore du premier ordre par rapport à $\Delta\alpha$. En opérant de même pour les arcs AB, A_1B_1, on obtiendra deux parallélogrammes entre lesquels sera comprise l'aire ω du quadrilatère ABA_1B_1. Les sommets des deux parallélogrammes sont distants respectivement des points A, B, A_1, B_1 de quantités du second ordre : leurs côtés ne diffèrent donc des cordes AA_1, AB ou des arcs AA_1, BB_1 que de quantités du second ordre. Représentons par s_1 et s_2 les arcs des courbes comptés à partir de deux origines fixes, par i l'angle des tangentes à ces deux courbes au point A; l'aire du quadrilatère ABA_1B_1 pourra être représentée par la formule

$$(3) \qquad \omega = \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i(1+\varepsilon)\,d\alpha\,d\beta,$$

dans laquelle ε désigne une quantité qui s'annule avec $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$.

Revenons au cas où $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont des quantités infiniment petites indépendantes. Pour chaque système de valeurs de $\Delta\alpha$ et de $\Delta\beta$, on pourra déterminer deux nombres entiers p et q tels que la différence des rapports $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$, $\frac{q}{p}$ soit moindre qu'un nombre donné, et, si l'on fait $\Delta\alpha = p\Delta'\alpha$, $\Delta\beta = q\Delta'\beta$, le rapport $\frac{\Delta'\beta}{\Delta'\alpha}$ sera

voisin de l'unité. A l'aide des lignes des deux systèmes, qui correspondent à des variations égales à $\Delta'\alpha$ ou $\Delta'\beta$ des deux paramètres, divisons le quadrilatère ABA_1B_1 en pq quadrilatères, à chacun desquels on pourra appliquer la formule (3). Lorsque $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont petits, les valeurs de $\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i$ relatives aux nouveaux quadrilatères diffèrent peu de celle qui correspond au point A; la formule (3) est donc applicable au quadrilatère ABA_1B_1, et l'on a

$$S = \lim \sum \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\, d\alpha\, d\beta,$$

et, par conséquent,

$$S = \int\int \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\, d\alpha\, d\beta, \tag{4}$$

en se dispensant d'écrire les limites. Si l'on veut commencer l'intégration par rapport à β, il faudra prendre pour limites les valeurs β_0 et B qui répondent aux points où la courbe $u = \alpha$ rencontre le contour; on intégrera ensuite par rapport à α entre les valeurs α_0, A relatives à celles des courbes α qui limitent le contour. Ainsi l'on aura

$$S = \int_{\alpha_0}^{A} d\alpha \int_{\beta_0}^{B} \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\, d\alpha\, d\beta.$$

La formule précédente se simplifie lorsque les deux familles de courbes employées forment un système double orthogonal. On a effectivement $\sin i = 1$, dans ce cas.

599. Considérons maintenant une portion S' de surface courbe limitée par un contour C'. Divisons l'aire S' en parties infiniment petites dans tous les sens au moyen

des lignes définies par les équations

(5) $$u = \alpha,\quad v = \beta,$$

dans lesquelles u et v sont des fonctions des coordonnées x, y, z, et α, β deux paramètres variables. Les équations (5), jointes à celle de la surface, permettent d'exprimer x, y, z en fonction de α et β; soit

(6) $$x = f(\alpha, \beta),\quad y = f_1(\alpha, \beta),\quad z = f_2(\alpha, \beta).$$

Projetons le contour C′ et les lignes qui divisent l'aire S′ sur le plan des xy. Supposons que la figure dont nous venons de nous servir pour le cas des aires planes représente cette projection, et désignons par A', A'_1, M', M'_1, ... les points de l'espace qui se projettent en A, A_1, M, M_1, ... Le quadrilatère ABA_1B_1 est la projection d'un élément ω' de la surface, et, si l'on représente par ζ l'angle du plan tangent en A avec le plan des xy, on a

$$\omega' = \frac{\omega}{\cos\zeta}(1 + \varepsilon') = \frac{1}{\cos\zeta}\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i(1 + \eta)\,d\alpha\,d\beta,$$

η devenant nul avec $d\alpha$ et $d\beta$. Représentons par s'_1, s'_2 les arcs qui se projettent suivant s_1 et s_2, portons sur les tangentes en A' à ces deux arcs des longueurs égales à $\frac{ds'_1}{d\alpha}$, $\frac{ds'_2}{d\beta}$, et achevons le parallélogramme ayant comme côtés adjacents ces deux droites. Le parallélogramme de l'espace se projette sur le plan des xy suivant un parallélogramme dont deux côtés adjacents sont les tangentes en A aux arcs s_1, s'_1; d'ailleurs, les projections des longueurs $\frac{ds'_1}{d\alpha}$, $\frac{ds'_2}{d\beta}$ sont égales à $\frac{ds_1}{d\alpha}$, $\frac{ds_1}{d\beta}$. La projection du parallélogramme du plan tangent a donc pour mesure $\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i$, et $\frac{1}{\cos\zeta}\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i$ est la mesure du paral-

lélogramme du plan tangent. Mais ce dernier parallélogramme a aussi pour mesure $\frac{ds'_1}{d\alpha}\frac{ds'_2}{d\beta}\sin i'$; il en résulte que l'on a

$$(7) \qquad \omega' = \frac{ds'_1}{d\alpha}\frac{ds'_2}{d\beta}\sin i'(1+\eta)\,d\alpha\,d\beta,$$

et, par conséquent, comme au numéro précédent,

$$S = \int\int \frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\sin i\,d\alpha\,d\beta,$$

S désignant maintenant l'aire de la surface courbe, s_1, s_2 les arcs des courbes tracées sur cette surface, et i l'angle des courbes.

Formule générale pour la détermination des volumes.

600. La formule par laquelle nous avons déterminé le volume des corps au n° 582 est, dans l'hypothèse des coordonnées rectangulaires,

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy;$$

comme $Z - z_0$ est l'intégrale de la différentielle dz entre les limites z_0 et Z, on peut écrire aussi

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} dz,$$

ou simplement

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz,$$

quand on juge inutile de mettre en évidence les limites de l'intégration. L'expression précédente de V est une

intégrale triple; elle équivaut à celle-ci

$$V = \lim \sum \Delta x \, \Delta y \, \Delta z,$$

qui indique que le volume V est la limite vers laquelle tend la somme des parallélépipèdes rectangles infiniment petits $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$, contenus dans le corps, et déterminés par trois familles de plans parallèles aux plans coordonnés.

Si au lieu de coordonnées rectangulaires on veut employer des coordonnées rectilignes obliques, soient a, b, c les angles des axes Oy et Oz, Oz et Ox, Ox et Oy; posons en outre

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c};$$

le parallélépipède oblique dont les arêtes contiguës sont Δx, Δy, Δz aura pour volume $k \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$, et, au lieu des formules précédentes, on aura

$$V = k \lim \sum \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

et

$$V = k \int\int\int dx \, dy \, dz.$$

601. Considérons généralement un système de trois familles de surfaces ayant pour équations

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma,$$

u, v, w désignant des fonctions données de trois coordonnées rectangulaires et α, β, γ étant des paramètres variables.

Si l'on prend dans chaque système deux surfaces individuelles répondant respectivement aux paramètres α et $\alpha + \Delta\alpha$, β et $\beta + \Delta\beta$, γ et $\gamma + \Delta\gamma$, on déterminera un

corps que l'on peut appeler un *parallélépipède* infiniment petit, car deux plans tangents à une même face ou à deux faces opposées font entre eux un angle infiniment petit.

Représentons par s_1, s_2, s_3 les arcs des arêtes curvilignes qui passent au point de rencontre des surfaces α, β, γ, l'arc s_1 étant mesuré sur la ligne de rencontre des surfaces β et γ, l'arc s_2 sur la ligne de rencontre des surfaces γ et α, l'arc s_3 sur la ligne de rencontre des surfaces α et β; soient enfin a, b, c les angles formés par les tangentes à deux de ces courbes. La considération des distances des points d'une face courbe du parallélépipède au plan tangent en l'un des points de cette face permet d'établir aisément, par un raisonnement analogue à celui qui nous a servi à évaluer l'aire d'un quadrilatère curviligne infiniment petit, que la mesure du parallélépipède infiniment petit considéré est

$$k\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\frac{ds_3}{d\gamma}(1+\varepsilon)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

ε désignant une quantité qui s'annule avec les trois accroissements $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

Cela posé, soit V un volume déterminé quelconque; il est évident que ce volume sera égal à la limite de la somme des parallélépipèdes curvilignes infiniment petits contenus dans ce corps et déterminés par les trois systèmes de surfaces dont nous avons parlé. Ainsi l'on aura

$$V = \lim\sum k\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\frac{ds_3}{d\gamma}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

ou

$$V = \int\int\int k\frac{ds_1}{d\alpha}\frac{ds_2}{d\beta}\frac{ds_3}{d\gamma}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Les limites des intégrations se détermineront sans diffi-

culté, comme dans les cas examinés précédemment, si la surface du corps considéré n'est rencontrée qu'en deux points par les courbes intersections des surfaces coordonnées ; quand le contraire aura lieu, il sera nécessaire de décomposer le corps en plusieurs parties que l'on évaluera séparément.

La formule précédente se simplifie quand les surfaces coordonnées sont orthogonales, car la quantité k, qui est en général une fonction des variables α, β, γ, se réduit alors à l'unité.

Cas particulier des coordonnées polaires.

602. Dans le cas des coordonnées polaires, les points de l'espace sont déterminés par trois familles de surfaces orthogonales. Construisons préalablement trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; la première famille se composera des sphères qui ont pour centre l'origine et dont nous désignerons le rayon par r ; la deuxième sera formée par des cônes de révolution autour de l'axe des z, dont l'angle générateur sera représenté par θ ; enfin la troisième famille se composera de plans passant par l'axe des z et faisant, avec le plan zx, un angle ψ.

Le rayon r varie de o à $+\infty$; l'angle θ qui est formé par la direction du rayon r avec la partie positive de l'axe des z varie de o à 180 degrés ; enfin l'angle ψ est égal à celui que forme la projection du rayon r sur le plan xy avec l'axe des x ; il se compte en marchant de la partie positive de l'axe des x vers la partie positive de l'axe des y, et il varie de o à 360 degrés.

Chaque sphère est coupée par les surfaces coordonnées des deux autres familles, suivant deux systèmes de lignes orthogonales, savoir un système de parallèles et un système de méridiens, et elle est alors décomposée en rec-

tangles infiniment petits, qui ont pour côtés des arcs de cercle répondant à des angles au centre égaux à $d\theta$ et $d\psi$; les rayons de ces arcs sont d'ailleurs égaux à r et à $r\sin\theta$ respectivement, d'où il suit que les côtés de notre rectangle sont $rd\theta$, $r\sin\theta\, d\psi$. Ce rectangle est la base de l'un des parallélépipèdes curvilignes que déterminent les trois surfaces considérées; quant à la troisième dimension de cet élément, elle est évidemment dr. D'après cela, le volume des corps sera déterminé par la formule suivante :

$$V = \int\int\int r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Supposons que l'origine soit extérieure au corps, et désignons par r_0, R les valeurs de r à l'entrée et à la sortie du corps; l'intégration relative à r devra être exécutée entre les limites r_0, R; or on a $\int r^2\, dr = \frac{1}{3} r^3 + \text{const.}$; donc

$$V = \frac{1}{3}\int\int (R^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

L'intégration relative à θ doit être faite entre les valeurs θ_0, Θ qui répondent aux limites du corps et qui sont des fonctions de ψ; enfin l'intégration relative à ψ doit être faite entre les valeurs ψ_0, Ψ qui répondent aux deux plans entre lesquels le corps est renfermé; ainsi l'on peut écrire

$$V = \frac{1}{3}\int_{\psi_0}^{\Psi} d\psi \int_{\theta_0}^{\Theta} (R^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta.$$

Supposons maintenant que l'origine des coordonnées soit à l'intérieur du corps. Dans ce cas, l'intégrale relative à r doit commencer à zéro, et les intégrales relatives à θ et ψ doivent être prises, la première entre

o et π, la seconde entre o et 2π. On a donc

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} R^3 \sin\theta\, d\theta$$

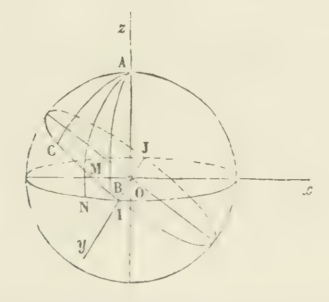
603. Nous venons de voir que chaque sphère de rayon r est décomposée en rectangles infiniment petits ω dont les côtés sont égaux à $r d\theta$, $r\sin\theta\, d\psi$; on a donc

$$\omega = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi (1 + \varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit, et l'aire d'une portion de sphère pourra être déterminée par la formule

$$S = r^2 \int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver l'aire d'un triangle sphérique au moyen de la formule précédente. Soient A, B, C les angles de ce triangle, dont les



sommets seront désignés par les mêmes lettres ; je prendrai pour axe des z le rayon OA de la sphère ; puis, menant un grand cercle perpendiculaire à OA qui coupe en deux points I et J le grand cercle auquel appartient le côté BC, je prendrai le rayon OI pour axe des y ; l'axe des x doit être perpendiculaire à OA et à OI : je choisirai la direction, qui est telle que la valeur ψ relative à C sur-

passe celle qui se rapporte à B, en supposant que ψ croisse quand on marche de l'axe des x vers l'axe des y. Cela posé, considérons un point M se mouvant sur le côté BC de B vers C, et menons l'arc de grand cercle AM qui, prolongé s'il le faut, coupera en N le grand cercle situé dans le plan xy. Si l'on désigne par ψ_0 la valeur de ψ qui se rapporte au point B, et que l'on prenne pour unité le rayon de la sphère, l'aire T du triangle sphérique sera donnée par la formule

$$\mathrm{T} = \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} d\psi \int_0^{\mathrm{AM}} \sin\theta\, d\theta = \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} (1 - \cos \mathrm{AM})\, d\theta,$$

ou, à cause de $\cos \mathrm{AM} = \sin \mathrm{MN}$,

$$\mathrm{T} = \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} d\psi - \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} \sin \mathrm{MN}\, d\psi = \mathrm{A} - \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} \sin \mathrm{MN}\, d\psi.$$

Mais on a, dans le triangle sphérique rectangle MNI,

$$\sin \mathrm{MN} = \frac{\sin \mathrm{I} \cos\psi}{\sin \mathrm{M}}, \qquad \cos \mathrm{M} = \sin \mathrm{I} \sin\psi,$$

et la dernière de ces formules donne par la différentiation

$$d\psi = -\frac{\sin \mathrm{M}}{\sin \mathrm{I} \cos\psi}\, d\mathrm{M}, \quad \text{d'où} \quad \sin \mathrm{MN}\, d\psi = -d\mathrm{M};$$

on aura donc

$$\mathrm{T} = \mathrm{A} + \int_{\psi_0}^{\psi_0+\mathrm{A}} \frac{d\mathrm{M}}{d\psi}\, d\psi;$$

enfin, comme on a $\mathrm{M} = \pi - \mathrm{B}$ pour $\psi = \psi_0$ et $\mathrm{M} = \mathrm{C}$ pour $\psi = \psi_0 + \mathrm{A}$, on aura

$$\mathrm{T} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \pi,$$

ce qui est la formule connue.

604. Considérons maintenant une surface courbe quelconque dont un point M ait pour coordonnées r, θ, ψ, et construisons la sphère de rayon r qui a pour centre l'origine des coordonnées. Le cône qui a pour sommet cette origine et pour base l'élément ω de la sphère déterminera sur la surface courbe un élément σ dont ω sera la projection conique sur la sphère r. Soient σ', ω' les projections orthogonales des éléments σ, ω sur le plan tangent en M à la sphère. Faisons tourner un plan autour de OM ; la trace de ω placé sur le plan tangent déterminera deux rayons vecteurs, issus du point fixe M, des contours de σ' et ω'. On voit aisément que le rapport de ces rayons vecteurs tend vers l'unité lorsque l'élément σ devient infiniment petit dans tous les sens ; il en résulte que la projection de σ sur le plan tangent en M ne diffère de ω que d'une quantité infiniment petite par rapport à cette projection, et l'on peut prendre

$$\sigma = \frac{\omega}{\cos\zeta} = \frac{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi}{\cos\zeta},$$

ζ étant l'angle formé par le rayon r avec la normale de la surface.

Les tangentes des côtés $r\,d\theta$ et $r\sin\theta\,d\psi$ de l'élément $d\omega$ forment avec le rayon r un système d'axes rectangulaires auxquels on peut rapporter la surface que nous considérons. Pour le point M les trois coordonnées sont nulles ; en outre, quand les deux premières coordonnées croissent successivement de $r\,d\theta$ et de $r\sin\theta\,d\psi$, la troisième coordonnée prend les accroissements $\frac{dr}{d\theta}\,d\theta$, $\frac{dr}{d\psi}\,d\psi$. En désignant par p et q les rapports de ces derniers accroissements à ceux des coordonnées qui les

produisent, on a

$$p = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad q = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial \psi}.$$

Mais, d'après les formules en coordonnées rectangulaires, relatives aux normales, l'angle ζ a pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

on a donc

$$\cos\zeta = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}},$$

et l'aire S d'une portion de la surface sera déterminée par la formule

$$S = \int\int\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right]\sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}\, r\,d\theta\,d\psi.$$

Du changement de variables dans les intégrales multiples.

605. La recherche des volumes terminés par des surfaces courbes et celle des aires de ces surfaces se ramènent, comme on l'a vu, à la détermination d'intégrales doubles qui, dans le système des coordonnées rectangulaires, ont pour expressions générales

$$\int\int z\,dx\,dy, \quad \int\int dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

D'autres questions conduisent aussi à des intégrales *triples*, *quadruples*, etc., et, dans tous les cas, l'intégration doit s'étendre à toutes les valeurs des variables qui satisfont à certaines conditions exprimables par une ou

plusieurs inégalités. Lorsqu'on peut effectuer l'intégration relative à l'une des variables, l'intégrale multiple se réduit à une intégrale d'ordre inférieur d'une unité, et, quand il n'en est pas ainsi, on peut quelquefois opérer la *réduction* par un changement de variables.

Considérons, par exemple, l'intégrale double

$$(1) \qquad U = \int\int V\,dx\,dy,$$

dans laquelle V désigne une fonction donnée de x et de y, et supposons qu'on veuille substituer aux variables x et y deux nouvelles variables u et v liées aux premières par deux relations données. Quelle que soit la portion du plan des xy qui comprend les points (x, y) auxquels l'intégration doit s'étendre, l'intégrale U se composera d'un ou plusieurs termes de la forme

$$(2) \qquad Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} V\,dy,$$

y_0 et y_1 désignant deux fonctions données de x, et x_0, x_1 étant deux constantes. On peut évidemment supposer que y et x croissent constamment de la limite inférieure à la limite supérieure, ce qui revient à dire que dx et dy sont positifs. Cela posé, des équations données entre x, y, u, v on peut tirer la valeur de y en fonction de x et de v ; soit

$$y = f(x, v),$$

et considérons l'intégrale $\int_{y_0}^{y_1} V\,dy$, où x peut être regardé comme un paramètre constant. Si l'on y remplace y par $f(x,v)$, dy par $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\,dv$, elle deviendra $\int_{v_0}^{v_1} V\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\,dv$, v_0 et v_1 étant les valeurs de v qui répondent à $y = y_0$,

$y = y_1$. Nous supposons ici que v varie toujours dans le même sens, quand y varie de y_0 à y_1 ; s'il en était autrement, on rentrerait dans cette hypothèse en décomposant l'intégrale relative à y en plusieurs parties. Comme dy est supposé positif, dv a le signe de $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$; si cette dérivée est négative, on peut ramener dv à être positif en changeant les limites de l'intégration, en sorte que l'on aura

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int V \left[\pm \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\right] dv,$$

$\pm \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$ désignant la valeur absolue de $\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}$, et l'intégrale relative à v étant prise entre les limites v_0 et v_1 ou v_1 et v_0. D'après cela, la valeur de Z sera

$$Z = \int\int V \left[\pm \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\right] dx\,dv.$$

Ce résultat nous donne le moyen d'achever la substitution que nous avons en vue ; car soit

$$x = F(u,v)$$

la valeur de x en u et v : il suffira de remplacer dx par $\pm \frac{\partial F(u,v)}{\partial u} du$, et l'on aura

$$Z = \int\int V \left[\pm \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\right] \left[\pm \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\right] du\,dv,$$

formule où les intégrations doivent être étendues *aux mêmes points* que dans la formule (2).

Mais si l'on différentie l'équation $y = f(x,v)$, en considérant x et y comme fonctions de u et v, on a

$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \frac{\partial f(x,v)}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) + \frac{\partial f(x,v)}{\partial v} dv$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x, v)}{\partial v},$$

et par suite, à cause de $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$,

$$\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

La valeur de z devient, en conséquence,

$$Z = \pm \int \int V \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du\, dv,$$

la fonction V étant exprimée en u et v.

606. On peut encore arriver au résultat qui précède en faisant usage des considérations développées au nº 598. L'intégrale Z peut être regardée comme représentant un volume composé de prismes élémentaires $V\,dx\,dy$ dont les bases $dx\,dy$ remplissent une portion du plan xy. Or deux équations telles que

$$f_1(x, y) = u, \quad f_2(x, y) = v,$$

où u et v désignent deux paramètres variables, représentent deux systèmes de courbes, et deux courbes infiniment voisines de l'un des systèmes détermineront avec deux courbes infiniment voisines de l'autre un parallélogramme infiniment petit, dont l'aire sera $ds_1\, ds_2 \sin i$, ds_1 et ds_2 étant les éléments infiniment petits des courbes u et v, et i l'angle de ces éléments. Le volume que représente Z sera évidemment la somme des volumes élémentaires $V\, ds_1\, ds_2 \sin i$, et l'on aura

$$Z = \int \int V\, ds_1\, ds_2 \sin i.$$

Mais x et y sont fonctions de u et v ; si l'on demeure sur la courbe u, v variera seul et l'on aura

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

d'où

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} dv;$$

si, au contraire, on marche sur la courbe v, u sera seul variable et l'on aura

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du,$$

d'où

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du.$$

Les cosinus des angles formés par ds_1 et par ds_2 avec les axes des x et des y étant proportionnels respectivement à $\frac{\partial x}{\partial v}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial u}$, on a

$$\cos i = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}};$$

$$\sin i = \frac{\pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}},$$

d'où

$$ds_1\, ds_2 \sin i = \pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

et par conséquent

$$Z = \int\int \pm\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) V\, du\, dv,$$

comme on l'a déjà trouvé.

Par exemple, le passage des coordonnées rectangulaires x et y aux coordonnées polaires ρ et ω, liées à x et y par les équations

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

conduira à la formule

$$\int\int V\,dx\,dy = \int\int V\rho\,d\rho\,d\omega;$$

les éléments $\rho\,d\rho\,d\omega$ sont ici des rectangles dont les côtés $d\rho$, $\rho\,d\omega$ sont les éléments respectifs de lignes droites menées par l'origine et de circonférences ayant cette origine pour centre.

607. En général, si l'on a une intégrale multiple d'ordre n, telle que

$$\int\int\ldots\int V\,dx\,dy\ldots dz,$$

et qu'aux n variables $x, y, \ldots, z$ on en substitue n autres $u, v, \ldots, w$, liées aux premières par des relations données, on aura

$$\int\int\ldots\int V\,dx\,dy\ldots dz = \int\int\ldots\int(\pm D)\,V\,du\,dv\ldots dw,$$

D désignant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ce théorème est démontré par ce qui précède dans

le cas de deux variables x et y ; il suffit donc de l'établir pour $n+1$ variables, en admettant qu'il ait lieu pour n variables.

Soit donc l'intégrale d'ordre $n+1$

$$U = \int\int\ldots\int\int V\,dx\,dy\ldots dz\,ds,$$

et supposons qu'on veuille substituer aux variables x, y, ..., z, s les $n+1$ variables u, v, ..., w, t. On peut commencer par exprimer les n variables x, y, ..., z en fonction de s et des n variables nouvelles u, v, ..., w, l'intégration relative à s devant alors être effectuée la dernière. Par ce changement de n variables, on aura, d'après ce que nous admettons,

$$U = \int\int\ldots\int\int \pm\Delta\,V\,ds\,du\,dv\ldots dw,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \ldots & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \ldots & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \ldots & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix};$$

nous employons ici la lettre ∂ pour exprimer les dérivées partielles prises dans l'hypothèse où les variables indépendantes sont s et u, v, ..., w, tandis que nous réservons la lettre d pour le cas où les variables indépendantes sont u, v, ..., w, t. Or, en différentiant l'une des variables x, y, ..., z dans cette dernière hypothèse, d'abord par rapport à l'une des variables u, v, ..., w,

puis par rapport à t, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t};$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}}\frac{\partial s}{\partial u},$$

et l'on aura des expressions semblables pour chacune des dérivées qui figurent dans la valeur du déterminant Δ.

Cela posé, dans l'évaluation de U, l'intégration relative à s peut être effectuée la première, après la substitution dont nous venons de parler, et, d'après ce qui a été dit en commençant, si l'on exprime s en fonction de t et de u, $v, \ldots, w$, on devra remplacer ds par $\frac{\partial s}{\partial t}\,dt$; on aura donc

$$U = \int\int\ldots\int\int\left(\pm\Delta\frac{\partial s}{\partial t}\right)V\,du\,dv\ldots dw\,dt,$$

et l'expression de Δ pourra se déduire de la suivante :

$$D_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \ldots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial u}, \ldots$ par $\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}}\frac{\partial s}{\partial u}, \ldots$

Désignons par D_x, D_y, ..., D_z les résultats que l'on

obtient en exécutant sur D_s une, deux, trois, ... fois la substitution circulaire qui consiste à remplacer x, y, ..., z, s respectivement par y, ..., z, s, x. Comme un déterminant ne fait que changer de signe quand on change l'une en l'autre deux lignes parallèles, il est facile de voir que la substitution de s à x, y, ..., z changera D_s en $-D_x$, $-D_y$, ..., $-D_z$ si le nombre n des variables x, y, ..., z est pair, et en $+D_x$, $-D_y$, ..., D_z si le nombre n est impair, les signes étant alternativement $+$ et $-$ dans ce dernier cas.

Cela posé, remplaçons dans l'expression de D_s les dérivées de x, savoir : $\frac{\partial x}{\partial u}$, ..., par les valeurs

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \frac{\partial s}{\partial u}, \quad \dots;$$

on obtiendra, d'après ce qui vient d'être dit, le résultat

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x.$$

Si dans cette expression on remplace les dérivées de y, savoir $\frac{\partial y}{\partial u}$, ..., par les valeurs $\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} \frac{\partial s}{\partial u}$, ..., D_x ne changera pas, car ce déterminant s'annule quand on y met s au lieu de y ; on aura donc le résultat

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x + \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y,$$

et l'on voit facilement que, si l'on remplace les dérivées des autres variables, jusqu'à celles de z inclusivement, par les valeurs indiquées, l'expression de D_s deviendra définitivement

$$D_s = \pm (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x \pm \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y \pm \ldots \pm (-1)^n \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_z,$$

en sorte que l'on aura

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D_s \frac{\partial s}{\partial t} = D_x \frac{\partial x}{\partial t} \pm D_y \frac{\partial y}{\partial t} \pm \ldots \pm D_z \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Or, on sait que le second membre de cette formule est précisément égal au déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial s}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial s}{\partial w} & \frac{\partial s}{\partial t} \end{vmatrix}$$

on a donc

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D,$$

et par conséquent

$$U = \int\int \ldots \int\int \pm D\, V du\, dv \ldots dw\, dt,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

608. Considérons en particulier les intégrales multiples qui se rapportent à l'évaluation des volumes et

des surfaces courbes. On a, pour l'expression des volumes en coordonnées rectangulaires,

$$U = \int\int\int dx\,dy\,dz,$$

et, si l'on substitue à x, y, z les trois variables u, v, w il viendra

$$U = \int\int\int \Delta\,du\,dv\,dw,$$

avec

$$\Delta = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial w} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial w} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial w}.$$

Supposons que l'on prenne pour u, v, w les coordonnées polaires r, θ, ψ, liées à x, y, z par les formules

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta,$$

on aura

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\psi, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -r\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\psi, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = r\sin\theta\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

ce qui donne

$$\Delta = r^2\sin\theta;$$

on aura donc, pour l'expression du volume U en coordonnées polaires,

$$U = \int\int\int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi,$$

et, si r croît constamment entre les limites r_0 et R fonc-

tions données de θ et ψ, on pourra écrire

$$U = \frac{1}{3}\int\int (R^3 - r_0^3)\sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

comme on l'a déjà trouvé (n° 602).

609. Passons maintenant aux aires des surfaces courbes; quand on emploie les coordonnées rectangulaires x et y, la détermination de ces aires dépend de l'intégrale double

$$U = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

où p et q désignent les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Si l'on substitue les nouvelles variables u, v à x et y, on aura

$$U = \int\int \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, du\, dv;$$

mais on a

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où

$$p\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$q\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

et, en substituant ces valeurs de p et q, il vient

$$= \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\, du\, dv.$$

Supposons qu'on prenne pour u et v les coordonnées polaires θ, ψ; les dérivées $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial x}{\partial \psi}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ de-

vront être prises ici en considérant le rayon r comme fonction de θ et ψ; alors on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\psi + r \cos\theta \cos\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\psi + r \cos\theta \sin\psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \cos\psi - r \sin\theta \sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \sin\psi + r \sin\theta \cos\psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\theta,$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \sin\theta \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta + r \cos\theta \right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial \theta} = - r \sin\theta \cos\psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta \right) + r \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial \theta} = - r \sin\theta \sin\psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta \right) - r \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\psi.$$

La somme des carrés des seconds membres de ces formules est égale à

$$\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2 \sin^2\theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2;$$

on retrouve donc la formule déjà donnée au n° 604 pour la détermination des aires en coordonnées polaires, savoir

$$U = \int\!\!\int \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2}\; r \, d\theta \, d\psi.$$

Sur une généralisation d'une formule relative à la théorie des intégrales eulériennes. Applications.

610. Nous présenterons ici un exemple remarquable de réduction d'une intégrale multiple. Cette intégrale est la suivante :

$$(1)\quad V_n^{(p)} = \int \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1}(1 - x_1 - \cdots - x_n)^{p-1} dx_1 \cdots dx_n,$$

où les exposants $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont positifs ; l'intégration doit être étendue à toutes les valeurs positives des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui satisfont à l'inégalité

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1.$$

Commençons par intégrer, relativement à x_n, la différentielle $x_n^{p_n-1}(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^{p-1}dx_n$, dans laquelle il faut regarder $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ comme des constantes. Les limites de cette intégration sont o et $1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}$: posons

$$x_n = (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})t,$$

t étant une nouvelle variable; les limites de l'intégration relative à t seront o et 1, et l'on aura le résultat

$$(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{p+p_n-1}\int_0^1 t^{p_n-1}(1 - t)^{p-1}dt.$$

L'intégrale relative à t n'est autre chose que l'intégrale eulérienne de première espèce $B(p_n, p)$; par conséquent, la formule (1) est réduite à

$$(2)\quad \begin{cases} V_n^{(p)} = B(p_n, p) \\ \quad \times \int \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} \cdots (1-x_1-\cdots-x_{n-1})^{p+p_n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{cases}$$

l'intégration devant être étendue aux valeurs positives des $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui satisfont à l'inégalité

$$x_1+x_2+\ldots+x_{p-1}<1.$$

D'après cela, la formule (2) n'est autre chose que celle-ci :

$$(3) \qquad V_n^p = B(p_n, p)\, V_{n-1}^{p+p_n}.$$

Lorsque $n=1$, la formule (1) se réduit à une intégrale simple $\int x_1^{p_1-1}(1-x)^{p-1}dx$ étendue aux valeurs de x comprises entre 0 et 1 ; cette intégrale n'est autre chose que $B(p_1, p)$. Il suit de là que la formule (3) subsiste pour $n=1$, pourvu que le symbole V soit réduit à l'unité, quand l'indice inférieur est nul. Cela étant, remplaçons n par 1, 2, 3, ..., n dans la formule (3) et multiplions ensuite les formules résultantes ; il viendra

$$V_n^p = B(p_n, p)\, B(p_{n-1}, p+p_n) \ldots B(p_1, p+p_n+\ldots+p_2),$$

ou, en remplaçant les fonctions B par leurs valeurs exprimées en Γ et réduisant ensuite,

$$(4) \qquad V_n^p = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p+p_1+p_2+\ldots+p_n)}.$$

Dans le cas de $p=1$, l'intégrale (1) se réduit à

$$(5) \quad V_n^{(1)} = \int\int\ldots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

et elle s'étend toujours aux valeurs positives des variables qui satisfont à l'inégalité $x_1+x_2+\ldots+x_n<1$; la formule (4) devient alors, à cause de $\Gamma(1)=1$,

$$(6) \qquad V_n^{(1)} = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)}.$$

611. On ramène au cas précédent celui de l'intégrale

$$(7)\quad T = \int\int\int\ldots\int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

étendue à toutes les valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} < 1,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des quantités positives données. En effet, si l'on pose

$$\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} = z_i,$$

d'où

$$x_i = a_i z_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \quad dx_i = \frac{a_i}{\alpha_i} z_i^{\frac{1}{\alpha_i}-1} dz_i,$$

la formule (7) deviendra

$$T = \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \int\int\ldots\int z_1^{\frac{p_1}{\alpha_1}-1} z_2^{\frac{p_2}{\alpha_2}-1} \ldots z_n^{\frac{p_n}{\alpha_n}-1} dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

et, en appliquant la formule (6),

$$(8)\quad T = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{p_n}{\alpha_n} + 1\right)} \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Considérons en particulier l'intégrale triple

$$T = \int\int\int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx\,dy\,dz$$

étendue à tous les éléments situés dans l'angle que forment les directions positives de trois axes rectangulaires et contenus dans l'ellipsoïde dont la surface a pour

équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La formule (8), appliquée au cas actuel, donnera

$$(9)\qquad T=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2}+1\right)}a^p b^q c^r.$$

Si l'on fait $p=q=r=1$, la formule (9) donnera le volume de l'ellipsoïde; si l'on suppose deux des trois exposants p, q, r égal à 1 et le troisième égal à 2, elle permettra de déterminer les coordonnées du *centre de gravité* de la huitième partie d'un ellipsoïde homogène; enfin, on en conclut aussi les quantités que l'on nomme *moments d'inertie*, en Mécanique, dans le cas d'un ellipsoïde homogène.

Aire de l'ellipsoïde.

612. Si l'on fait usage des coordonnées rectangulaires, la surface de l'ellipsoïde aura pour équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et la formule propre à donner la surface sera

$$S=\int\!\!\int\frac{\sqrt{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dx\,dy.$$

Le résultat de l'intégration relative à x ou à y dépend des fonctions elliptiques; l'emploi des coordonnées polaires offrirait le même inconvénient; mais on peut

effectuer la réduction de l'intégrale en prenant pour variables les angles θ, ψ tels que

$$x = a\sin\theta\cos\psi,\quad y = b\sin\theta\sin\psi,\quad z = c\cos\theta,$$

qui vérifient l'équation de l'ellipsoïde. On trouve, par les formules du n° 609,

$$S = \int\int\sqrt{a^2b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta(a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi)}\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

les intégrations s'étendant de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ et de $\psi = 0$ à $\psi = 2\pi$. L'intégration relative à θ peut être effectuée, et l'expression de S est alors réduite à une intégrale simple; mais l'intégration dont nous venons de parler introduit des arcs de cercle, et le résultat qu'on obtient par cette voie n'a pas la forme simple dont il est susceptible. C'est pourquoi nous n'entreprendrons point le calcul, et nous emploierons une autre méthode pour résoudre la question que nous avons en vue. Le procédé que nous allons exposer est très-remarquable, et il peut être employé avec avantage dans des cas assez étendus.

613. Désignons par u le cosinus de l'angle que fait le plan tangent au point (x, y, z) avec le plan xy on aura

$$u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\frac{z^2}{c^4} = 0.$$

Si l'on considère u comme une constante, l'équation (2) représentera un cône du second degré, et les équations (1) et (2), prises simultanément, appartiendront à une courbe qui sera le lieu des points de l'ellipsoïde pour lesquels le

plan tangent fait avec le plan xy un même angle ayant u pour cosinus. On aura la projection de cette courbe sur le plan des xy en éliminant z entre les équations (1) et (2); on trouve ainsi

$$(3)\qquad \frac{a^2-(a^2-c^2)u^2}{a^4(1-u^2)}x^2+\frac{b^2-(b^2-c^2)u^2}{b^4(1-u^2)}y^2=1,$$

équation d'une ellipse dont les demi-axes ont respectivement pour valeurs

$$\frac{a^2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{a^2-(a^2-c^2)u^2}},\qquad \frac{b^2\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{b^2-(b^2-c^2)u^2}},$$

et dont l'aire totale E sera, en conséquence,

$$(4)\qquad \mathrm{E}=\frac{\pi a^2b^2(1-u^2)}{\sqrt{[a^2-(a^2-c^2)u^2][b^2-(b^2-c^2)u^2]}}.$$

Cela posé, soit $d\mathrm{E}$ l'accroissement que prend E quand u augmente de du, la partie de l'ellipsoïde située d'un côté quelconque du plan xy et qui se projette sur l'espace annulaire $d\mathrm{E}$ a pour valeur $\frac{d\mathrm{E}}{u}$, et, pour obtenir l'aire totale S de l'ellipsoïde, il suffit d'intégrer l'expression $\frac{d\mathrm{E}}{u}$ ou $\frac{d\mathrm{E}}{du}\frac{du}{u}$ depuis $u=1$ jusqu'à $u=0$ et de doubler le résultat; on obtient ainsi, en renversant les limites et en changeant le signe de l'intégrale,

$$(5)\qquad \mathrm{S}=-2\int_0^1\frac{d\mathrm{E}}{du}\frac{du}{u}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans cette formule la valeur de E tirée de l'équation (4), et l'on aura l'aire de l'ellipsoïde exprimée par une intégrale simple; mais il convient de transformer cette expression. A cet effet,

nous supposerons $a > b > c$, l'inégalité n'excluant pas l'égalité, et nous ferons, pour abréger,

$$\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = k^2, \quad c = a\cos\mu,$$

d'où

$$\sqrt{a^2-c^2} = a\sin\mu, \quad c = b\sqrt{1-k^2\sin^2\mu},$$

μ étant un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; enfin, nous prendrons pour variable, au lieu de u, l'angle φ déterminé par la formule

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu},$$

et, comme u varie entre les limites o et 1, l'angle φ variera de o à μ.

D'après cela, les équations (4) et (5) deviennent

$$(6) \qquad E = \frac{\pi ab\left(1 - \frac{a^2}{a^2-c^2}\sin^2\varphi\right)}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

et

$$(7) \qquad S = \frac{-2\sqrt{a^2-c^2}}{a}\int_0^\mu \frac{dE}{d\varphi}\frac{1}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Or on trouve, au moyen de l'équation (6),

$$\frac{dE}{\sin\varphi} = d\frac{E}{\sin\varphi} + \frac{E\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi = d\frac{E}{\sin\varphi} + \pi ab\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$- \pi ab\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

d'ailleurs, si l'on différentie l'expression $\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$,

on obtient

$$d\,\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = -\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et, si l'on tire de cette équation la valeur de

$$\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

pour la substituer dans la formule précédente, il viendra, en ayant égard à la valeur de E,

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\sqrt{a^2-c^2}}{a}\,\frac{dE}{d\varphi}\,\frac{1}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= 2\pi c^2 d\left\{\frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\mu}}{\operatorname{tang}\mu\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\left[1+\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^4}(\sin^2\varphi-\sin^2\mu)\right]\right\} \\
&\quad+\frac{2\pi b}{\sqrt{b^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + c^2\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].
\end{aligned}$$

Intégrant entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \mu$, on a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
S &= -2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}} \\
&\quad\times\left[(a^2-c^2)\int_0^\mu \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi + c^2\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].
\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, conformément à la notation de Legendre,

$$(9)\quad \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\mu, k), \qquad \int_0^\mu \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\mu, k),$$

on retrouvera la formule donnée par cet illustre géo-

mètre, savoir

$$(10)\quad S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}[(a^2 - c^2)E(\mu, k) + c^2 F(\mu, k)].$$

Si l'on veut introduire l'intégrale elliptique de deuxième espèce $\int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$, l'identité

$$\int_0^\mu \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

permettra d'écrire la formule (8) comme il suit :

$$(11)\quad \begin{cases} S = 2\pi c^2 + \dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ \qquad \times \left[\displaystyle\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\int_0^\mu \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right]. \end{cases}$$

Dans le cas de $c = b$, l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, on a $k = 0$ et $\mu = \arccos\frac{b}{a}$, et la formule précédente devient (n° 595)

$$(12)\qquad S = 2\pi b^2 + 2\pi\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arccos\frac{b}{a}.$$

Si, au contraire, $a = b$, l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe, on a $k = 1$, et la formule (8) donne (n° 595)

$$(13)\qquad S = 2\pi b^2 + \frac{\pi b c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}\log\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{b - \sqrt{b^2 - c^2}}.$$

CHAPITRE VI.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

Des équations différentielles.

614. Toute équation qui renferme plusieurs variables et dans laquelle figurent en outre des différentielles ou des dérivées d'ordres quelconques est dite généralement une *équation différentielle*.

Si les variables qui entrent dans une équation différentielle dépendent d'une seule d'entre elles, l'équation est une *équation différentielle ordinaire*.

Au contraire, lorsque les variables d'une équation différentielle dépendent de plusieurs d'entre elles, l'équation est dite *aux dérivées partielles* ou *aux différentielles totales*, selon qu'elle renferme, avec les variables, des dérivées partielles ou des différentielles totales de celles de ces variables qui sont regardées comme dépendantes.

Nous ne nous occuperons, dans ce Chapitre, que des équations différentielles ordinaires. Une telle équation peut renfermer, d'après ce que nous venons de dire, une variable indépendante, une ou plusieurs variables dépendantes et certaines dérivées de ces dernières variables. L'ordre le plus élevé de ces dérivées est l'*ordre* de l'équation différentielle.

Les équations différentielles qu'il y a lieu de considérer sont généralement en même nombre que les variables

dépendantes. Lorsque ce nombre est supérieur à 1, elles constituent ce que l'on nomme (n° 53) un *système d'équations différentielles simultanées.*

615. Étant donnée une équation différentielle d'ordre quelconque ou un système de telles équations, on peut toujours lui substituer un système d'équations différentielles du premier ordre en introduisant des variables nouvelles et en augmentant le nombre des équations, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 70. Effectivement, si l'on désigne par x la variable indépendante, par y l'une des autres variables et par m l'ordre de la plus haute des dérivées de y qui figurent dans l'équation proposée ou dans le système proposé, on posera

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{dy'}{dx}=y'', \quad \dots, \quad \frac{dy^{(m-2)}}{dx}=y^{(m-1)},$$

et l'on joindra ces équations différentielles aux proposées, après avoir écrit dans celles-ci

$$y', \ y'', \ \dots, \ y^{(m-2)}, \ y^{(m-1)}, \ \frac{dy^{(m-1)}}{dx}$$

au lieu de

$$\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \dots, \ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \ \frac{d^my}{dx^m}.$$

Pareillement, si n est l'ordre de la plus haute des dérivées d'une autre variable z qui figurent dans le système, on introduira dans ce système les nouvelles équations

$$\frac{dz}{dx}=z', \quad \frac{dz'}{dx}=z'', \quad \dots, \quad \frac{dz^{(n-2)}}{dx}=z^{(n-1)},$$

après avoir écrit

$$z', \ z'', \ \dots, \ z^{(n-1)}, \ \frac{dz^{(n-1)}}{dx}$$

au lieu de

$$\frac{dz}{dx}, \ \frac{d^2z}{dx^2}, \ \dots, \ \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \ \frac{d^nz}{dx^n},$$

et ainsi de suite. Il est évident qu'en opérant de cette manière on obtiendra un système équivalent au proposé et dans lequel il n'y aura aucune équation d'ordre supérieur au premier.

616. Cela posé, considérons un système de n équations différentielles distinctes du premier ordre où figurent, avec une variable indépendante x, n autres variables y, $z, \ldots, u, v$ et les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$. Deux cas peuvent se présenter : ou bien les n équations proposées détermineront les valeurs des n dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$, qui seront ainsi des fonctions données des variables $x, y, z, \ldots, u, v$; ou bien l'on pourra, par la combinaison des équations proposées, former un certain nombre i d'équations qui ne renfermeront que les seules variables $x, y, z, \ldots, u, v$ et qui pourront tenir lieu de i équations du système. Le second cas est, comme on voit, celui d'un système composé de $n-i$ équations différentielles jointes à i équations entre les seules variables, et il peut être ramené au premier cas par l'élimination de i variables. Effectivement, les i équations entre $x, y, z, \ldots, u, v$ déterminent i des variables $y, z, \ldots, u, v$ en fonction des autres, et, si l'on substitue leurs valeurs dans les $n-i$ équations restantes, on obtiendra un système de $n-i$ équations différentielles du premier ordre entre la variable x et $n-i$ autres variables.

Il résulte de là que tous les cas des équations différentielles ordinaires se ramènent à celui d'un certain nombre n d'équations différentielles du premier ordre entre $n+1$ variables, qui déterminent les valeurs des dérivées des n variables dépendantes en fonction de toutes les variables. Et, si l'on fait ici abstraction des difficultés de

l'élimination, les équations du système auront la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x, y, z, \ldots, u, v),\\
\frac{dz}{dx} &= f_1(x, y, z, \ldots, u, v),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{du}{dx} &= f_{n-2}(x, y, z, \ldots, u, v),\\
\frac{dv}{dx} &= f_{n-1}(x, y, z, \ldots, u, v),
\end{aligned}$$

$f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ étant des fonctions déterminées de x, y, $z, \ldots, u$, v.

Dans le cas où le nombre des variables est 2, le système se réduit à une équation différentielle unique

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Des équations intégrales.

617. Soit

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

une équation différentielle du premier ordre entre les variables x et y. Il sera démontré plus loin que, si la fonction $f(x, y)$ reste continue pour les valeurs de x et de y comprises entre certaines limites et que x_0, y_0 désignent des valeurs choisies à volonté entre les limites respectives dont nous venons de parler, il existe une fonction $F(x, x_0, y_0)$ qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ et qui est telle, que l'équation (1) est satisfaite quand on pose

(2) $$y = F(x, x_0, y_0);$$

on verra, en outre, qu'il n'existe qu'une seule fonction $F(x, x_0, y_0)$ jouissant de cette propriété.

L'équation (2) est dite l'*intégrale générale* de l'équation (1); on peut y regarder x_0 comme une valeur déterminée quelconque et y_0 comme une constante arbitraire.

Si l'on a obtenu par une voie quelconque une équation

$$(3) \qquad \Phi(x, y, C) = 0$$

entre les variables x, y et une constante arbitraire C telle qu'on puisse en tirer une valeur de y qui satisfasse à l'équation (1), l'équation (3) coïncidera avec l'intégrale générale, car on pourra déterminer la constante C de manière que l'on ait

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0,$$

et, par conséquent, la valeur de y tirée de l'équation (3) se réduira à y_0 pour $x = x_0$.

L'équation (1) devenant identique quand on y remplace y et $\frac{dy}{dx}$ par les valeurs tirées des équations

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

il est évident qu'elle résulte de l'élimination de la constante C entre les mêmes équations, d'où il suit que les équations différentielles du premier ordre ont toutes la même origine (n° 51).

618. Considérons maintenant un système quelconque de n équations différentielles du premier ordre entre $n+1$ variables $x, y, z, \ldots, u, v$, savoir

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \ldots, u, v), \\ \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots, u, v), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{dv}{dx} = f_{n-1}(x, y, z, \ldots, u, v). \end{cases}$$

Si les seconds membres de ces équations sont des fonctions continues, lorsque les variables sont comprises entre certaines limites et que x_0, y_0, z_0, ..., u_0, v_0 désignent des quantités arbitraires respectivement comprises entre les mêmes limites, il existe, comme on le verra plus loin, un système de fonctions F, F_1, ..., F_{n-1} de la variable x et des quantités x_0, y_0, z_0, ..., u_0, v_0 qui se réduisent respectivement à y_0, z_0, ..., u_0, v_0 pour $x = x_0$ et qui sont telles, que les équations du système (1) sont vérifiées quand on fait

$$(2)\quad \begin{cases} y = F(x, x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0, v_0), \\ z = F_1(x, x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0, v_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v = F_{n-1}(x, x_0, y_0, z_0, \ldots, u_0, v_0); \end{cases}$$

en outre, le système des fonctions F, F_1, ..., F_{n-1} est unique.

Le système (2) constitue le *système des intégrales générales* des équations (1) ou le *système intégral* du système (1) ; on peut prendre pour x_0 une valeur déterminée choisie à volonté ; y_0, z_0, ..., u_0, v_0 sont n constantes arbitraires.

Si l'on a obtenu par une voie quelconque un système de n équations entre les variables $x, y, z, \ldots, u, v$ et n constantes arbitraires C, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, savoir

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi(x, y, z, \ldots, u, v, C, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0, \\ \Phi_1(x, y, z, \ldots, u, v, C, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{n-1}(x, y, z, \ldots, u, v, C, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0, \end{cases}$$

et qu'on puisse tirer de ces équations des valeurs de y, z, ..., u, v propres à vérifier les équations (1), le système (3) coïncidera avec le système intégral, pourvu cependant qu'on puisse attribuer aux constantes C, C_1, ...,

C_{n-1} des valeurs telles que y, z, ..., u, v se réduisent respectivement aux valeurs arbitraires y_0, z_0, ..., u_0, v_0 quand on fait $x = x_0$.

Il est évident que cette dernière condition sera remplie si les équations (3) définissent pour C, C_1, ..., C_{n-1} des valeurs déterminées fonctions des variables $x, y, z, \ldots, u, v$, savoir

$$(4) \quad \begin{cases} C = \Psi(x, y, z, \ldots, u, v), \\ C_1 = \Psi_1(x, y, z, \ldots, u, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_{n-1} = \Psi_{n-1}(x, y, z, \ldots, u, v). \end{cases}$$

Le système des équations (4) n'est autre que le système intégral mis sous une forme particulière ; les équations qui le composent ne renferment qu'une seule constante arbitraire ; chacune de ces équations est dite une *intégrale* du système (1).

Cauchy a établi le premier d'une manière rigoureuse l'existence des équations intégrales, mais la démonstration qu'il a donnée de ce théorème fondamental est d'une complication excessive. Le même théorème a été ensuite démontré d'une manière fort simple et au moyen de considérations très-différentes par MM. Briot et Bouquet. Nous exposerons ici l'analyse que ces géomètres ont publiée dans un Mémoire qui fait partie du XXXVI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* ; cette analyse repose sur quelques lemmes dus à Cauchy et que nous allons établir.

Propositions préliminaires.

619. LEMME I. — *Soient x_0 une constante déterminée, $x = x_0 + \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}$ une variable, $f(x)$ une fonction bien déterminée de cette variable qui reste continue et qui*

ait une dérivée déterminée tant que le module ρ *n'est pas supérieur à la limite* R; *si* M *désigne le maximum des valeurs que prend le module de* $f(x)$ *quand on fait varier* ρ *de* 0 *à* R *et* ω *de* 0 *à* 2π, *on aura*

$$\text{mod}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0 < 1.2.3\ldots n\ \frac{M}{R^n},$$

$\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0$ *désignant la valeur que prend la* $n^{\text{ième}}$ *dérivée de* $f(x)$ *pour* $x = x_0$.

En effet, on a (n° 500)

$$\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_0 = 1.2\ldots n R^{-n}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n\omega\sqrt{-1}} f\left(x_0 + R e^{\omega\sqrt{-1}}\right) d\omega;$$

le module de l'élément différentiel

$$e^{-n\omega\sqrt{-1}} f\left(x_0 + Re^{\omega\sqrt{-1}}\right) d\omega$$

n'étant pas supérieur à $M\,d\omega$, il est évident que le module de l'intégrale ne peut surpasser $\int_0^{2\pi} M\,d\omega$, c'est-à-dire $2\pi M$, ce qui démontre la proposition énoncée.

620. Lemme II. — *Soient* $x_0, y_0, z_0, \ldots$ *m constantes déterminées,* $x = x_0 + \rho\, e^{\omega\sqrt{-1}}$, $y = y_0 + \rho' e^{\omega'\sqrt{-1}}$, $z = z_0 + \rho'' e^{\omega''\sqrt{-1}}$, ... *m variables* $f(x, y, z, \ldots)$ *une fonction déterminée qui reste continue et qui ait une dérivée déterminée, relativement à chaque variable, tant que les modules* $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ *ne deviennent pas supérieurs aux limites respectives* R, R', R'', ...; *si* M *désigne le maximum des valeurs que prend le module de* $f(x, y, z, \ldots)$ *quand on fait varier* $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ *de* 0 *à* R, *de* 0 *à* R', *de* 0 *à* R'', ..., *et les angles* ω, ω',

ω'', ... de o à 2π, on aura

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{n+n'+n''+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''} \dots}\right)_0 < (1.2\dots n)(1.2\dots n')\dots \frac{M}{R^n R'^{n'} R''^{n''}\dots},$$

l'indice zéro indiquant qu'il faut remplacer $x, y, z, \dots$ par $x_0, y_0, z_0, \dots$ après les différentiations.

En effet, si l'on applique à $f(x, y, z, \dots)$, regardé comme fonction de la seule variable x, la formule rappelée dans le lemme I, on aura

$$\frac{R^n}{1.2\dots n}\frac{\partial^n f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n\omega\sqrt{-1}} f(x + R e^{\omega\sqrt{-1}}, y, z, \dots)\, d\omega,$$

x devant être remplacé par x_0. En différentiant n' fois par rapport à y, on aura

$$\frac{R^n}{1.2\dots n}\frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n\omega\sqrt{-1}} \frac{\partial^{n'} f(x + R e^{\omega\sqrt{-1}}, y, z, \dots)}{\partial y^{n'}}\, d\omega;$$

on a d'ailleurs, par la formule déjà employée,

$$\frac{R'^{n'}}{1.2\dots n'}\frac{\partial^{n'} f(x + R e^{\omega\sqrt{-1}}, y, z, \dots)}{\partial y^{n'}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-n'\omega'\sqrt{-1}} f(x + R e^{\omega\sqrt{-1}}, y + R' e^{\omega'\sqrt{-1}}, z, \dots)\, d\omega',$$

où il faut faire non-seulement $x = x_0$, mais encore $y = y_0$; on aura donc

$$\frac{R^n}{1.2\dots n}\frac{R'^{n'}}{1.2\dots n'}\frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'}}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(n\omega+n'\omega')\sqrt{-1}} f(x + R e^{\omega\sqrt{-1}}, y + R' e^{\omega'\sqrt{-1}}, z, \dots)\, d\omega\, d\omega'$$

où l'on doit faire $x = x_0$, $y = y_0$.

Il est évident qu'en poursuivant la même marche on

obtiendra la formule

$$\frac{R^n}{1.2\ldots n}\frac{R'^{n'}}{1.2\ldots n'}\frac{R''^{n''}}{1.2\ldots n''}\cdots\left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\cdots}f(x,y,z,\ldots)}{\partial x^n\,\partial y^{n'}\,\partial z^{n''}\ldots}\right]_0$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}e^{-(n\omega+n'\omega'+n''\omega''+\ldots)\sqrt{-1}}$$

$$\times f(x_0+Re^{\omega\sqrt{-1}},\, y_0+R'e^{\omega'\sqrt{-1}},\, z_0+R''e^{\omega''\sqrt{-1}},\ldots)\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\ldots,$$

dans laquelle le second membre est une intégrale multiple d'ordre m; il est à peine nécessaire d'ajouter que chaque produit tel que $1.2\ldots n$ doit être réduit à l'unité quand $n=0$.

Maintenant, chaque élément de l'intégrale multiple a un module inférieur ou au plus égal à $M\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\ldots$; donc le module du second membre de la formule précédente ne peut surpasser

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}M\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\ldots,$$

c'est-à-dire M, ce qui démontre la proposition énoncée.

621. Lemme III. — *Les mêmes choses étant posées que dans le lemme précédent, toutes les dérivées partielles de la fonction*

$$\varphi(x,y,z,\ldots)=\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{R'}\right)\left(1-\frac{z-z_0}{R''}\right)\cdots}$$

ont, pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0,\ldots$, des valeurs respectivement égales aux limites des valeurs assignées par le lemme II aux modules des dérivées partielles correspondantes de la fonction $f(x,y,z,\ldots)$.

En effet, si l'on différentie la fonction $\varphi(x,y,z,\ldots)$ n fois par rapport à x, puis n' fois par rapport à y, puis

n'' fois par rapport à z, puis..., on aura

$$\frac{\partial^{n+n'+n''+\cdots}\varphi(x, y, z, \ldots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''}\ldots}$$

$$= (1.2\ldots n)(1.2\ldots n')(1.2\ldots n'')\ldots \mathrm{R}^{-n}\mathrm{R}'^{-n'}\mathrm{R}''^{-n''}\ldots$$

$$\times \frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{x-x_0}{\mathrm{R}}\right)^{n+1}\left(1-\frac{y-y_0}{\mathrm{R}'}\right)^{n'+1}\left(1-\frac{z-z_0}{\mathrm{R}''}\right)^{n''+1}\ldots}$$

et, en faisant $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; ...,

$$\left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\cdots}\varphi(x, y, z, \ldots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''}\ldots}\right]_0$$

$$= (1.2\ldots n)(1.2\ldots n')(1.2\ldots n'')\ldots \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^n \mathrm{R}'^{n'} \mathrm{R}''^{n''}\ldots}.$$

Démonstration de l'existence de l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables.

622. THÉORÈME. — *Soient x_0, y_0 deux constantes choisies à volonté, et*

$$x = x_0 + \rho e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad y = y_0 + \rho' e^{\omega'\sqrt{-1}}$$

deux variables; si $f(x, y)$ est une fonction déterminée de x et de y qui reste continue tant que ρ et ρ' ne dépassent pas les limites respectives R, R', *et qu'en même temps les dérivées $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ soient déterminées, il existe une fonction y de x qui reste continue tant que le module de $x - x_0$ n'est pas inférieur à une certaine limite r, qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ et qui enfin satisfait à l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Toute fonction y de x qui reste continue pour les valeurs de $x - x_0$ dont le module est inférieur à une quantité donnée r et qui a une dérivée déterminée est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières de $x - x_0$, et l'on a (n° 383)

$$(2)\quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ... étant les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... qui répondent à $x = x_0$.

Si une telle fonction y est susceptible de satisfaire à l'équation (1), les coefficients $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ... seront déterminés en fonction de x_0 et de y_0 par l'équation (1) jointe à celles qu'on en déduit par la différentiation, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En faisant $x = x_0$, $y = y_0$, on aura successivement par les équations (3) les valeurs de $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ..., et il en résulte que la fonction y, si elle existe, est unique.

D'après cela, pour démontrer le théorème énoncé, il suffit de prouver : 1° que, les coefficients $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ... ayant été déterminés par le moyen des équations (3), la série contenue dans le second membre de la formule (2) est convergente tant que le module de $x - x_0$ reste infé-

rieur à une certaine quantité r, auquel cas la série a pour somme une fonction continue (n° 475); 2° que la fonction y définie par la même formule (2) satisfait effectivement à l'équation (1).

A cet effet, désignons par M le maximum du module des valeurs que prend $f(x, y)$ quand on fait varier ρ de o à R, ρ' de o à R' et les angles ω, ω' de o à 2π. Posons en outre

$$(4)\qquad \varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)\left(1-\frac{Y-y_0}{R'}\right)},$$

et considérons l'équation différentielle

$$(5)\qquad \frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y).$$

Je dis qu'il existe une fonction Y de x qui reste continue tant que le module de $x - x_0$ ne dépasse pas une certaine limite, qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$, et qui satisfait à l'équation (5). En effet, l'équation (5) peut s'écrire comme il suit,

$$\left(1-\frac{Y-y_0}{R'}\right)\frac{dY}{dx} - \frac{M}{1-\frac{x-x_0}{R}} = 0,$$

et il est évident qu'on l'obtient en différentiant l'équation

$$(6)\qquad (Y-y_0) - \frac{(Y-y_0)^2}{2R'} + MR\log\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right) = 0.$$

Cette équation (6) est du deuxième degré par rapport à $Y - y_0$, et ses deux racines deviennent égales entre elles lorsque l'on a

$$\log\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right) = -\frac{R'}{2MR} \quad \text{ou} \quad x - x_0 = R\left(1 - e^{-\frac{R'}{2MR}}\right)$$

Si donc on pose

$$r = R\left(1 - e^{-\frac{R'}{2MR}}\right),$$

celle des racines Y de l'équation (6) qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$ restera fonction continue de x tant que le module de $x - x_0$ sera inférieur à r. Ainsi l'on a, pour de telles valeurs de x,

$$(7)\quad Y = y_0 + \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots.$$

Les coefficients $\left(\frac{dY}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0$, $\cdots$ de ce développement s'obtiendront en faisant $x = x_0$, $Y = y_0$ dans le système formé par l'équation (5) et celles qu'on en déduit par la différentiation, savoir :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y),\\ &\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\frac{dY}{dx},\\ &\frac{d^3Y}{dx^3} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial Y}\frac{dY}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2}\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\frac{d^2Y}{dx^2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

En outre, on a, par l'équation (4),

$$\frac{R^n}{1.2\ldots n}\,\frac{R'^{n'}}{1.2\ldots n'}\,\frac{\partial^{n+n'}\varphi}{\partial x^n\,\partial Y^{n'}} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)^{n'+1}},$$

le produit $1.2\ldots n$ ou $1.2\ldots n'$ devant être réduit à l'unité quand n ou n' est nul, et cette formule montre que toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{n+n'}\varphi(x, Y)}{\partial x^n\,\partial Y^{n'}}$$

ont, pour $x = x_0$, $Y = y_0$, des valeurs positives; il en

résulte, à cause des formules (8), que les quantités

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0, \quad \ldots$$

sont elles-mêmes positives.

Désignons par A le maximum du module des valeurs que prend la fonction Y quand on fait varier de o à r le module ρ de $x - x_0$ et de o à 2π l'argument ω; on aura, d'après le lemme I (n° 619),

$$(9) \qquad \left(\frac{d^nY}{dx^n}\right)_0 \leq 1.2\ldots n\,\frac{A}{r^n}.$$

Comparons maintenant entre eux les deux systèmes d'équations (3) et (8), dans lesquels nous supposons $x = x_0$, $Y = y = y_0$. La première équation du système (3) et la première du système (8) nous montrent que l'on a

$$\operatorname{mod}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 < \left(\frac{dY}{dx}\right)_0,$$

d'après le lemme II du n° 620. On voit ensuite (lemme III, n° 621) que les modules des deux termes du second membre de la deuxième équation (3) sont respectivement inférieurs aux termes du second membre de la deuxième équation (8), lesquels sont l'un et l'autre positifs; il en résulte que

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 < \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0,$$

et ainsi de suite, en sorte que l'on a généralement

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 < \left(\frac{d^nY}{dx^n}\right)_0,$$

et, à cause de l'inégalité (9),

$$(10) \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 < 1.2\ldots n\,\frac{A}{r^n}.$$

ou

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\right] < \mathrm{A} \times \operatorname{mod}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n.$$

Si le module de $x - x_0$ est inférieur à r, la progression géométrique dont le terme général est $\mathrm{A} \times \operatorname{mod}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n$ est convergente; donc la série formée par les modules des termes de la série (2) est convergente, dans la même hypothèse (n° 97) : par conséquent, la série (2) est elle-même convergente (n° 363), et elle a pour somme une fonction déterminée et continue y. Il faut remarquer que l'inégalité (10) prouve aussi la convergence de la série obtenue en différentiant par rapport à x les termes de la série (2); cette dernière série a donc pour somme $\frac{dy}{dx}$.

Il nous reste à démontrer que la fonction y définie par la formule (2) satisfait bien à l'équation (1).

On a d'une part

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots$$

et d'autre part

$$f(x, y) = f_0 + f'_0 \frac{x-x_0}{1} + f''_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous écrivons f_0 au lieu de $f(x_0, y_0)$ dans cette formule et nous désignons par $f'_0, f''_0, \ldots$ les valeurs que prennent, pour $x = x_0$, $y = y_0$, les quotients $f', f'', \ldots$ obtenus en divisant par dx, dx^2, ... respectivement les différentielles totales df, $d^2 f$, ... Les quantités f', f'', ... sont déterminées par les équations

$$(11)\quad \begin{cases} f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}, \\ f'' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2 y}{dx^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour avoir f'_0, f''_0, ..., il faut y faire $x = x_0$, $y = y_0$ et remplacer $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, ... par les valeurs tirées des équations (3). Or on voit que les seconds membres des équations (11) sont identiques à ceux des équations (3) si l'on fait abstraction de la première équation du système (3); on a donc

$$f'_0 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \quad f''_0 = \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0, \quad \ldots,$$

et, par conséquent, la fonction (2) satisfait bien à l'équation (1).

Démonstration de l'existence du système intégral d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

623. MM. Briot et Bouquet ont étendu leur analyse au cas d'un système quelconque d'équations différentielles simultanées du premier ordre, et ils ont démontré ce nouveau théorème :

THÉORÈME. — *Soient x_0, y_0, z_0, ... $m+1$ constantes choisies à volonté, et*

$$x = x_0 + \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad y = y_0 + \rho' e^{\theta'\sqrt{-1}}, \quad z = z_0 + \rho'' e^{\theta''\sqrt{-1}}, \quad \ldots$$

$m+1$ variables. Si les m fonctions

$$f(x, y, z, \ldots), \quad f_1(x, y, z, \ldots), \quad f_2(x, y, z, \ldots), \quad \ldots$$

restent continues tant que ρ, ρ', ρ'', ... ne dépassent pas les limites respectives R, R', R'', ... et qu'elles admettent en même temps des dérivées déterminées relativement à chaque variable, il existe m fonctions y, z, ... de la variable x qui restent continues tant que le module de $x - x_0$ reste inférieur à une certaine limite r, qui se réduisent respectivement à y_0, z_0, ...

pour $x = x_0$ et qui satisfont aux m équations différentielles simultanées

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \ldots), \quad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots), \ldots.$$

Désignons par $M, M_1, \ldots$ les *maxima* des modules des valeurs que prennent les fonctions $f(x, y, z, \ldots)$, $f_1(x, y, z, \ldots)$, ... quand on fait varier $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ de 0 à R, de 0 à R', de 0 à R'', ... respectivement, et les angles $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ de 0 à 2π; posons

$$\varphi(x, Y, Z, \ldots) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)\left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)\left(1 - \frac{Z - z_0}{R''}\right)\cdots},$$

et considérons les m équations simultanées

$$(2)\quad \frac{dY}{dx} = M\varphi(x, Y, Z, \ldots), \quad \frac{dZ}{dx} = M_1\varphi(x, Y, Z, \ldots), \ldots.$$

On peut trouver des fonctions $Y, Z, \ldots$ qui satisfassent aux équations (2) et qui se réduisent à $y_0, z_0, \ldots$ respectivement pour $x = x_0$. En effet, si l'on pose

$$(3)\qquad Y - y_0 = MS, \quad Z - z_0 = M_1 S, \quad \ldots,$$

puis que l'on détermine la fonction S de manière qu'elle s'annule pour $x = x_0$ et qu'elle vérifie l'équation

$$(4)\qquad \frac{dS}{dx} = \varphi(x, y_0 + MS, z_0 + M_1 S, \ldots),$$

il est évident que les équations (2) deviendront identiques. L'équation (4) peut se mettre sous la forme suivante,

$$\left(1 - \frac{MS}{R'}\right)\left(1 - \frac{M_1 S}{R''}\right)\cdots\frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0.$$

ou

$$\left[1-\left(\frac{M}{R'}+\ldots\right)S+\left(\frac{MM_1}{R'R''}+\ldots\right)S^2-\ldots\right]\frac{dS}{dx}-\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R}}=0.$$

et on l'obtient en différentiant la suivante :

$$(5)\quad \left[S-\left(\frac{M}{R'}+\ldots\right)\frac{S^2}{2}+\left(\frac{MM_1}{R'R''}+\ldots\right)\frac{S^3}{3}-\ldots\right]+R\log\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)=0.$$

Soit r le plus petit des modules qu'il faille attribuer à $x-x_0$ pour que l'équation (5) ait deux racines S égales entre elles. Tant que le module de $x-x_0$ sera inférieur à r, celle des racines S qui s'annule pour $x=x_0$ sera une fonction continue de x, développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières de $x-x_0$; en outre, si l'on désigne par A le *maximum* du module de cette fonction S pour les valeurs de ρ et ω respectivement comprises entre o et r, o et 2π, on aura (n° 619)

$$(6)\qquad \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n S}{dx^n}\right)_0<\frac{A}{r^n}.$$

Enfin il est évident que les fonctions Y, Z, ..., qui sont proportionnelles à S, sont développables, en même temps que cette fonction, en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de $x-x_0$.

Cela posé, d'après le lemme III du n° 621, les valeurs des modules que prennent les fonctions $f(x, y, z, \ldots)$, $f_1(x, y, z, \ldots)$, ... pour $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, ... sont respectivement moindres que les valeurs des dérivées correspondantes des fonctions $M\varphi(x, Y, Z, \ldots)$, $M_1\varphi(x, Y, Z, \ldots)$ pour $x=x_0$, $Y=y_0$, $Z=z_0$, ... Il en résulte que, si l'on compare le système formé par les équations (1) et celles qu'on en déduit par la différentiation au système formé par les équations (2) et

celles qui s'en déduisent, on trouvera, comme au n° 622, que les valeurs de

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0, \quad \ldots,$$

tirées des premières équations, ont des modules respectivement moindres que les valeurs réelles et positives

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{dZ}{dx}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)_0, \quad \ldots,$$

fournies par les équations du second système. On a donc, à cause des formules (3) et de l'inégalité (6),

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\right] < \mathrm{MA} \times \operatorname{mod}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n,$$

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\right] < \mathrm{M_1A} \times \operatorname{mod}\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n,$$

. . . .

Il en résulte que les séries

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 \frac{x-x_0}{1} + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

. . . .

sont convergentes tant que l'on a $\operatorname{mod}(x-x_0) < r$. Ces séries définissent des fonctions y, z, ... qui restent continues pour les valeurs de x dont il s'agit, et le raisonnement déjà employé au n° 622 prouve que les fonctions y, z, ... satisfont effectivement aux équations différentielles.

624. Remarque. — Il est évidemment permis, dans la démonstration qui précède, de remplacer les modules R', R'', ... par le plus petit d'entre eux $\mathcal{R}$, et les *maxima* M, M_1, ... par le plus grand d'entre eux $\mathfrak{M}$. Les équa-

tions (4) et (5) deviennent alors

$$\left(1-\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}S\right)^m \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R}} = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}}\left[1-\left(1-\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}S\right)^{m+1}\right] + R\log\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right) = 0.$$

La dérivée relative à S de cette dernière équation donne $1-\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}S = 0$; on a donc, dans le cas de deux racines égales,

$$\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}} + R\log\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right) = 0,$$

d'où

$$x - x_0 = R\left(1-e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}R}}\right),$$

et, par conséquent, on peut prendre pour la quantité r

$$r = R\left(1-e^{-\frac{\mathfrak{R}}{(m+1)\mathfrak{M}R}}\right).$$

Propriétés des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

625. Considérons un système de n équations différentielles simultanées entre les $n+1$ variables x, y, z, ..., v en vertu desquelles les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{dv}{dx}$ aient des valeurs déterminées. Désignons par $\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}, \dots, \frac{V}{X}$ ces valeurs ; les équations différentielles seront

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}, \quad \dots, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{V}{X};$$

et on pourra les comprendre dans une formule unique, savoir

$$(1)\qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \ldots = \frac{dv}{V};$$

X, Y, Z, ..., V sont des fonctions déterminées des variables x, y, z, ..., v, à l'exception de l'une d'elles, qui peut être choisie à volonté.

L'existence du système intégral étant établie, supposons, comme au n° 618, que les équations de ce système soient résolues par rapport aux n constantes arbitraires $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ qu'elles renferment, et représentons-les par

$$(2)\qquad \begin{cases} \Psi(x, y, z, \ldots) = C, \\ \Psi_1(x, y, z, \ldots) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{n-1}(x, y, z, \ldots) = C_{n-1}. \end{cases}$$

La différentiation des équations (2) fait disparaître les arbitraires $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$, et, par conséquent, les équations qui résultent de cette différentiation forment un système équivalent au système (1). En d'autres termes, on a identiquement

$$(3)\qquad d\Psi = 0, \quad d\Psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad d\Psi_{n-1} = 0$$

lorsqu'on prend pour dx, dy, dz, ... des quantités proportionnelles à X, Y, Z, ...

Nous avons dit (n° 618) que chacune des équations (2) est nommée une intégrale du système (1) : mais, comme les combinaisons que l'on peut faire avec ces équations sont susceptibles de leur être substituées, nous appellerons généralement *intégrale* du système (1) toute équation

$$(4)\qquad \Pi(x, y, z, \ldots, v) = \Gamma,$$

dont le second membre est une constante arbitraire Γ et

dont le premier membre est une fonction Π des seules variables $x, y, z, \ldots$, telle que la différentielle $d\Pi$ se réduise identiquement à zéro quand on prend, pour les différentielles $dx, dy, dz, \ldots$, des quantités proportionnelles à $X, Y, Z, \ldots$.

Il est évident qu'on formera une telle équation en égalant à une constante Γ une fonction quelconque des premiers membres des équations (2), car, si l'on différentie l'équation

$$(5) \qquad F(\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}) = \Gamma,$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1} d\Psi_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_{n-1}} d\Psi_{n-1} = 0,$$

et cette équation est satisfaite, à cause des formules (3) qui ont lieu quand on suppose les équations (1).

Mais il est facile de démontrer en outre que, si l'équation (4) est une intégrale du système (1), elle est nécessairement de la forme (5). En effet, supposons que X ne soit pas nul; $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ étant des fonctions des $n+1$ variables $x, y, z, \ldots, v$, il est permis de regarder $y, z, \ldots, v$ comme fonctions de x et de $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$, puisque, par hypothèse, le système (2) coïncide avec le système intégral. L'équation (4) prendra donc la forme

$$F(x, \Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}) = \Gamma;$$

la différentiation donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1} d\Psi_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_{n-1}} d\Psi_{n-1} = 0,$$

et, à cause des équations (3), on a simplement

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

ce qui exprime que la fonction F est indépendante de x. Il n'y a donc, pour le système (1), que n intégrales distinctes.

626. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\Pi(x, y, z, \ldots, v) = \text{const.}$$

soit une intégrale du système des équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots = \frac{dv}{V}$$

est que l'on ait identiquement, en vertu de ces équations,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv = 0;$$

cette condition est donc

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \ldots + V \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0,$$

et l'on a cette proposition :

Théorème I. — *Si* Π = *const. est une intégrale des équations simultanées*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots = \frac{dv}{V},$$

la fonction Π *satisfait identiquement à l'équation aux dérivées partielles*

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \ldots + V \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0.$$

Réciproquement, toute fonction Π *qui satisfait identiquement à l'équation aux dérivées partielles donne, quand on l'égale à une constante arbitraire, une intégrale du système des équations simultanées.*

Et, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, on peut énoncer cet autre théorème :

THÉORÈME II. — *Si l'équation aux dérivées partielles*

$$X \frac{\partial H}{\partial x} + Y \frac{\partial H}{\partial y} + \ldots + V \frac{\partial H}{\partial v} = 0$$

est satisfaite quand on prend successivement, pour H, *n fonctions distinctes* $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$, *toute fonction* H *qui satisfait à la même équation est nécessairement une fonction de* $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$.

Réduction des systèmes d'équations différentielles entre un nombre quelconque de variables à des équations différentielles qui ne renferment que deux variables.

627. Une équation différentielle d'ordre quelconque entre deux variables ou, plus généralement, un système de n équations différentielles d'ordre quelconque entre $n+1$ variables se ramène, comme on l'a vu (n° 615), à un système d'équations différentielles du premier ordre. Il est facile de montrer que, réciproquement, un tel système peut se ramener à des équations différentielles qui ne renferment que deux variables.

Soient les n équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{dz}{dx} = Z, \quad \ldots, \quad \frac{dv}{dx} = V,$$

où Y, Z, ..., V désignent des fonctions données des $n+1$ variables $x, y, z, \ldots, v$. Le système intégral renferme n constantes arbitraires, et l'on peut concevoir que les équations de ce système soient résolues par rapport à y, z, ..., v. Considérons en particulier l'équation qui détermine y en fonction de x et des arbitraires ; si les n arbi-

traires figurent dans cette équation, il faudra, pour les éliminer, joindre à l'équation dont nous parlons celles qu'on en déduit par n différentiations successives; donc y dépendra, dans ce cas, d'une équation différentielle d'ordre n. Mais, si l'expression de y en x ne renferme que i arbitraires, i étant $< n$, il est évident que i différentiations suffiront pour l'élimination des constantes, et, par conséquent, y ne dépendra que d'une équation différentielle d'ordre i.

628. L'équation différentielle de laquelle y dépend peut être obtenue au moyen des équations proposées. En effet, on a, en différentiant la première des équations (1),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

ou, à cause des équations (1),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z} + \ldots + V\frac{\partial Y}{\partial v};$$

nous désignerons, pour abréger, par Y_1 le second membre de cette équation, et nous aurons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y_1.$$

En différentiant cette équation et en faisant usage des équations (1), on obtiendra la nouvelle équation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = Y_2,$$

où Y_2 est une fonction connue des variables x, y, z, ..., v. En poursuivant cette marche, on formera le système des n équations

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = Y_1, \quad \ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = Y_{n-1},$$

dont les seconds membres $Y, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sont des fonctions connues de $x, y, z, \ldots, v$.

Si les n équations (2) sont nécessaires pour l'élimination des $n-1$ variables $z, \ldots, v$, ces variables seront déterminées par les $n-1$ premières équations en fonction de

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

et, en substituant leurs valeurs dans la dernière équation (2), on obtiendra une équation différentielle d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Mais il peut arriver que les i premières équations (2) suffisent pour former une équation différentielle entre x et y. Cette équation différentielle sera, dans ce cas, de l'ordre i, et $i-1$ des $n-1$ variables $z, \ldots, v$ seront connues en fonction des $n-i$ autres et de

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}};$$

alors, si l'on substitue les valeurs de ces $i-1$ variables dans celles des équations (1) qui renferment les dérivées des $n-i$ autres, ces dernières seront déterminées par un système de $n-i$ équations différentielles analogues au système (1), avec cette seule différence que les seconds membres renfermeront une fonction y définie par une équation différentielle d'ordre i, ainsi que les $i-1$ premières dérivées de cette fonction. En opérant sur le système dont il s'agit comme nous avons fait à l'égard du système (1), on fera dépendre une nouvelle variable z d'une équation différentielle d'un certain ordre j égal ou inférieur à $n-i$, laquelle pourra renfermer la fonction y

et les dérivées de cette fonction, jusqu'à l'ordre $i-1$ seulement, puisque la dérivée d'ordre i s'exprime par les dérivées des ordres inférieurs. Si le nombre j est égal à $n-i$, les $n-i-1$ variables restantes seront déterminées en fonction de

$$x, \quad y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}, \quad z, \quad \frac{dz}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{j-1}z}{dx^{j-1}};$$

mais, dans le cas contraire, j de ces variables seulement pourront être exprimées en fonction des précédentes quantités et des $n-i-j$ variables restantes. Il est évident qu'en poursuivant la même marche on formera un système d'équations différentielles dont les ordres auront pour somme n; chacune de ces équations ne renfermera qu'une seule variable dépendante, outre celles qui figurent dans les équations précédentes, et que nous regardons comme déterminées par ces équations. Quant aux variables qui ne figurent pas dans les équations différentielles dont il s'agit, elles sont déterminées en fonction des autres variables et des dérivées de celles-ci.

629. Pour former l'équation différentielle par laquelle sont liées entre elles deux des variables qui figurent dans un système d'équations différentielles simultanées, il n'est pas nécessaire que ces équations soient mises sous la forme que nous leur avons supposée au numéro précédent. La différentiation et l'élimination conduiront dans tous les cas à l'équation demandée.

Considérons, par exemple, les deux équations simultanées

$$(1)\quad \begin{cases} f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^m y}{dx^m}, z, \dfrac{dz}{dx}, \ldots, \dfrac{d^p z}{dx^p}\right) = 0, \\ F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{dx^n}, z, \dfrac{dz}{dx}, \ldots, \dfrac{d^q z}{dx^q}\right) = 0, \end{cases}$$

qui renferment trois variables x, y, z, dont la première est regardée comme indépendante. La première équation est de l'ordre m par rapport à y et de l'ordre p par rapport à z; pour la seconde équation, l'ordre relatif à y est n et celui qui se rapporte à z est q.

Soit μ le nombre des équations différentielles résolues par rapport aux dérivées, dont se compose le système différentiel du premier ordre que l'on peut substituer au système proposé (n° 616). D'après ce qui a été dit au numéro précédent, si les équations (1) déterminent les valeurs de la plus haute dérivée de y, savoir $\frac{d^m y}{dx^m}$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$, ainsi que la plus haute des dérivées de z, savoir $\frac{d^p z}{dx^p}$ ou $\frac{d^q z}{dx^q}$, en fonction des dérivées des ordres inférieurs et des variables x, y, z, ce qui exige évidemment que les différences $m - n$, $p - q$ ne soient pas de même signe, le nombre μ sera égal à la plus grande des deux sommes $m + q$, $n + p$; s'il n'en est pas ainsi, μ sera inférieur à cette plus grande somme.

Cela posé, pour faire l'élimination de z, différentions les équations proposées, la première q fois, la seconde p fois; en joignant les équations obtenues aux proposées, nous aurons un système de $p + q + 2$ équations. Les dérivées de z figureront dans ce système jusqu'à celles de l'ordre $p + q$, et, quant à l'ordre de la plus haute dérivée de y, il sera égal au plus grand des nombres $m + q$, $n + p$. Il s'agit d'éliminer les $p + q + 1$ quantités

$$z, \quad \frac{dz}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p+q} z}{dx^{p+q}}$$

entre les $p + q + 2$ équations ainsi formées. Si toutes ces équations sont nécessaires pour l'élimination, $p + q + 1$

d'entre elles détermineront les valeurs de $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}}$, et la substitution de ces valeurs dans la dernière équation donnera une équation différentielle

$$(3) \qquad \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^i y}{dx^i}\right) = 0,$$

dont l'ordre i sera égal à μ; on aura en même temps, comme nous venons de le dire,

$$(4) \qquad z = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}\right),$$

Ψ étant une fonction déterminée.

Mais, si les $p+q+2$ équations que nous avons formées ne doivent pas être toutes employées pour l'élimination, l'ordre i de l'équation (3) qui résulte de cette élimination sera inférieur à μ. Alors il résulte de ce qui a été dit au numéro précédent que z ne sera plus déterminé, dans ce cas, en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots$; mais elle dépendra d'une équation différentielle

$$(5) \qquad \Pi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{\mu-i}z}{dx^{\mu-i}}\right) = 0,$$

d'ordre $\mu - i$ et dans laquelle figurera, avec ses $i-1$ premières dérivées, la fonction y déterminée par l'équation (3).

Des intégrales des divers ordres d'une équation différentielle d'ordre quelconque, à deux variables.

630. Après avoir montré que tous les cas des équations différentielles ordinaires se ramènent à celui d'un système du premier ordre, dont les équations déterminent

les dérivées en fonction des variables, nous avons fait voir qu'un tel système peut lui-même être remplacé par une ou plusieurs équations différentielles d'un certain ordre, qui renferment seulement deux variables, mais où figurent les fonctions définies par les équations précédentes. Le cas d'une équation différentielle d'un ordre quelconque n doit être regardé comme le plus simple ; il nous reste à présenter quelques considérations importantes sur ce sujet.

Soit

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

une équation différentielle d'ordre n entre les deux variables x, y. Si l'on pose

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)},$$

l'équation (1) déterminera une valeur de $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$; soit Y cette valeur, en sorte que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \mathrm{Y}.$$

Supposons que la fonction Y remplisse les conditions de continuité exigées par la théorie des n°s 622 et 623 ; le système différentiel formé des équations simultanées (2) et (3) admettra un système intégral, et les équations de ce système détermineront pour $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ des valeurs fonctions de x et qui, pour $x = x_0$, se réduiront respectivement à des constantes arbitraires $y_0, y'_0, y''_0, y_0^{(n-1)}$. Si l'on représente par

$$(4) \qquad y = \Phi(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$$

celle des équations du système intégral qui détermine y,

il est évident que les $n-1$ autres équations de ce système s'obtiendront en différentiant successivement $n-1$ fois l'équation (4). Cette équation (4) est dite l'*intégrale générale* de l'équation (1). Et, comme le système intégral des équations simultanées (2) et (3) est unique, on voit que :

Si l'on a trouvé, par une voie quelconque, une équation

$$(5) \qquad f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

renfermant n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *et de laquelle on puisse tirer une valeur de y propre à vérifier l'équation* (1), *l'équation* (5) *coïncidera avec l'intégrale générale de cette équation* (1), *pourvu qu'on puisse assigner aux constantes des valeurs telles que y et ses* $n-1$ *premières dérivées prennent des valeurs arbitraires données quand on attribue à x une valeur quelconque choisie à volonté.*

Cette dernière condition sera remplie si le système formé par l'équation (5) et celles qu'on déduit de celle-ci par $n-1$ différentiations détermine les valeurs des arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en fonction de

$$x, \quad y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

631. On reproduit l'équation différentielle (1) quand on élimine de l'intégrale générale (5) les arbitraires qu'elle renferme au moyen de la différentiation. Mais supposons qu'on ne veuille éliminer de l'équation (5) que i arbitraires, savoir

$$C_1, \ C_2, \ \ldots, \ C_i;$$

il faudra exécuter i différentiations, et je dis que, de quel-

que manière que l'on combine les opérations de différentiation et d'élimination, le résultat obtenu sera toujours le même. En effet, supposons qu'on ait pu obtenir deux équations distinctes ne contenant plus les arbitraires C_1, $C_2, \ldots, C_i$. Soient

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_n\right) = 0,$$

$$\Psi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_n\right) = 0$$

ces deux équations. Si elles ne déterminent pas pour $\frac{d^i y}{dx^i}$ la même valeur, on pourra éliminer cette dérivée, et l'on obtiendra une équation d'ordre $i-1$ au plus, non identique et renfermant $n-i$ arbitraires, savoir

$$\Pi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}}, C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_n\right).$$

En joignant à cette équation celles qu'on en déduit par $n-i$ différentiations, on aura un système de $n-i+1$ équations entre lesquelles on pourra éliminer les arbitraires $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_n$, et le résultat de cette élimination sera une équation différentielle non identique, d'ordre $n-1$ au plus, et ne renfermant aucune arbitraire. On aurait donc, en faisant $x = x_0$, une relation entre y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)_0$, et dès lors ces quantités ne seraient plus arbitraires comme elles doivent être.

632. Cela posé, nous appellerons *intégrale première* ou *du premier ordre* d'une équation différentielle d'ordre n le résultat obtenu en éliminant de l'intégrale générale $n-1$ des constantes arbitraires qu'elle renferme. Le nombre des intégrales premières est évidemment égal à n; chacune de ces intégrales est une équation diffé-

rentielle d'ordre $n-1$ renfermant une constante arbitraire Le système des n intégrales premières constitue le système intégral du système différentiel du premier ordre par lequel on peut remplacer l'équation différentielle d'ordre n.

Pareillement, nous appellerons *intégrale deuxième* ou *du deuxième ordre* le résultat obtenu en éliminant $n-2$ des arbitraires contenues dans l'intégrale générale. Le nombre des intégrales du deuxième ordre est évidemment égal au nombre des combinaisons de n choses deux à deux, c'est-à-dire égal à $\frac{n(n-1)}{2}$; chacune de ces intégrales est une équation différentielle d'ordre $n-2$, renfermant deux constantes arbitraires.

Et généralement nous nommerons *intégrale d'ordre i* d'une équation différentielle d'ordre n le résultat obtenu en éliminant $n-i$ des arbitraires contenues dans l'intégrale générale; le nombre des intégrales d'ordre i est celui des combinaisons de n choses i à i, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$; chacune de ces intégrales est une équation différentielle d'ordre $n-i$ qui renferme i constantes arbitraires.

Dans l'ordre n il n'y a qu'une seule intégrale, qui n'est autre chose que l'intégrale générale.

633. Étant donnée l'équation différentielle d'ordre n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

si l'on a trouvé, par une voie quelconque, une équation différentielle d'ordre $n-i$

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}, C_1, C_2, \ldots, C_i\right) = 0,$$

renfermant i constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_i$, et de laquelle on puisse tirer une valeur de $\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}$ qui satisfasse à la proposée, on pourra la regarder comme une intégrale d'ordre i, pourvu que cette équation, jointe à celles que l'on en déduit par $i-1$ différentiations, détermine les valeurs des arbitraires en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

En effet, on peut, dans notre hypothèse, déterminer les constantes de manière que

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

aient, pour $x = x_0$, des valeurs arbitraires $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-i}$; ensuite l'équation d'ordre $n-i$ admet une intégrale générale, et les nouvelles constantes que celle-ci renferme peuvent être choisies de manière que $y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}}$ se réduisent respectivement à $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-i-1)}$ pour $x = x_0$. L'intégrale générale dont il s'agit sera donc en même temps celle de la proposée.

Il convient encore d'appeler l'attention sur la proposition suivante, qui résulte des considérations que nous venons de présenter :

Si l'on connaît k intégrales premières d'une équation différentielle d'ordre n, on obtiendra une intégrale d'ordre k en éliminant les $k-1$ plus hautes dérivées de la fonction inconnue entre les k intégrales premières.

En particulier :

Si l'on connaît les n intégrales premières d'une équation différentielle d'ordre n, on obtiendra l'intégrale générale en éliminant entre ces intégrales les $n-1$ dérivées qu'elles renferment.

Définition des intégrales particulières et des solutions particulières des équations différentielles.

634. Lorsqu'on attribue des valeurs déterminées aux constantes arbitraires qui figurent dans les intégrales d'une équation différentielle ou d'un système de telles équations, on obtient des résultats auxquels on a donné le nom d'*intégrales particulières*. La considération des intégrales particulières est fort importante dans certaines questions, ainsi qu'on le verra dans la suite de cet Ouvrage, mais elle ne constitue pas l'objet que nous avons actuellement en vue.

Les équations différentielles peuvent admettre des solutions qui ne sont pas comprises dans leurs intégrales : on peut obtenir, en général, ces solutions par des procédés purement algébriques, et on leur a donné le nom de *solutions particulières*.

La théorie par laquelle nous avons établi l'existence des intégrales n'a pu mettre en évidence celle des solutions particulières, car cette théorie suppose la continuité de certaines fonctions qui cessent d'être continues lorsque les variables dont elles dépendent prennent les valeurs qui conviennent aux solutions particulières. Nous étudierons d'abord, dans ce qui va suivre, le cas des équations différentielles du premier ordre à deux variables; nous ferons voir ensuite comment on peut appliquer les mêmes considérations aux équations différentielles des ordres supérieurs.

De la solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre, fondée sur la considération de l'intégrale générale.

635. La solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre peut s'obtenir facilement, comme on va voir, au moyen de l'intégrale générale.

Soit l'équation différentielle.

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

et

$$(2)\qquad y = f(x, C)$$

l'intégrale générale de cette équation, C étant la constante arbitraire. La différentiation de l'équation (2) donne

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x}.$$

L'équation (2) sera l'expression de toutes les fonctions de x si l'on y regarde C comme une fonction indéterminée de x. Différentions (2) dans cette hypothèse, on aura

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C}\frac{dC}{dx}.$$

Mais, comme (2) satisfait à l'équation (1), on a identiquement, quels que soient x et C,

$$(5)\qquad \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)],$$

et cette identité ne sera pas troublée quand on met au lieu de C une fonction quelconque de x.

Pour que (4) satisfasse aussi à l'équation (1), il faut que l'on ait

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = F[x, f(x, C)],$$

C étant une certaine fonction de x, et, comme l'équation (5) a lieu en même temps, on doit avoir

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0,$$

qui se décompose en deux, savoir

(6) $$\frac{dC}{dx} = 0$$

et

(7) $$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = 0$$

L'équation (6) donne $C = \text{const.}$ et reproduit l'intégrale générale. L'équation (7) détermine une certaine valeur de C en fonction de x, savoir

(8) $$C = \psi(x),$$

qui répond en général à une solution particulière. Cette solution

(9) $$y = f[x, \psi(x)],$$

pourra toutefois être comprise comme cas exceptionnel dans l'intégrale générale; cela arrivera particulièrement si $\psi(x)$ se réduit à une constante. Il n'y aura pas de solution particulière si l'équation (7) ne contient pas C.

636. Il faut remarquer que l'équation (7) peut se mettre sous la forme

(10) $$\frac{\partial y}{\partial C} = 0,$$

$\frac{\partial y}{\partial C}$ étant tirée de l'intégrale générale; si donc celle-ci n'est pas résolue par rapport à y, et qu'elle ait la forme

$$(11) \qquad \Phi(x, y, C) = 0,$$

l'équation (10) donnera

$$(12) \qquad \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = 0.$$

Cette formule exclut évidemment les solutions particulières $x =$ une constante. Comme rien n'empêche de prendre x pour variable principale, on peut lui donner la forme

$$(13) \qquad \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = 0,$$

et cette formule exclut les solutions particulières $y =$ une constante.

La solution particulière s'obtiendra en éliminant C de l'équation (11) au moyen de (12) ou de (13).

Si l'équation (11) est préparée de manière que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ conservent des valeurs finies, on pourra prendre simplement

$$(14) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0;$$

mais les valeurs de C tirées de cette équation pourront cesser de donner des solutions particulières si elles annulent $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

637. Exemple. — Soit l'équation différentielle

$$y - 2x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

que l'on obtient en éliminant C entre l'équation

$$\Phi(x, y, C) = (3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0$$

et celle qu'on en déduit par la différentiation relative à x et à y.

On a ici

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 2(3xy + 2x^3 + C);$$

l'élimination de C entre $\Phi = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0$ donne

$$y = -x^2,$$

mais cette valeur de y ne satisfait pas à l'équation différentielle; on vérifie aisément que les deux dérivées $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ s'annulent lorsqu'on fait simultanément $\Phi = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0$.

De la solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre, déduite de l'équation différentielle.

638. Soit

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

et

$$(2) \qquad y = f(x, C),$$

son intégrale générale, de manière que

$$(3) \qquad \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)]$$

soit une identité.

En différentiant (3) par rapport à C, on a

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f(x,C)}{\partial x \partial C} = \frac{\partial F[x, f(x,C)]}{\partial f}\,\frac{\partial f(x,C)}{\partial C},$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{\left[\dfrac{\partial^2 f(x,C)}{\partial x \partial C}\right]}{\left[\dfrac{\partial^2 f(x,C)}{\partial C^2}\right]} \times \frac{\left[\dfrac{\partial^2 f(x,C)}{\partial C^2}\right]}{\left[\dfrac{\partial f(x,C)}{\partial C}\right]} = \frac{\partial F[x, f(x,C)]}{\partial f},$$

équation nécessairement identique; on peut attribuer à C telle valeur fonction de x que l'on voudra. Donnons à C la valeur que représente l'équation (8) du n° 635, savoir $\psi(x)$, qui convient à la solution particulière. Le premier facteur du premier membre de (5) conserve une valeur finie différente de zéro, car c'est la valeur de $-\dfrac{dC}{dx}$ ou $-\psi'(x)$; on a effectivement, en différentiant l'équation (7) du numéro précédent,

$$\frac{\partial^2 f(x,C)}{\partial x \partial C} + \frac{\partial^2 f(x,C)}{\partial C^2}\,\frac{dC}{dx} = 0.$$

Quant au deuxième facteur du premier membre de (5), je dis qu'il est infini. Supposons que le contraire ait lieu, et posons, pour abréger,

$$\frac{\partial f(x,C)}{\partial C} = f'(x,C);$$

le facteur Θ dont nous nous occupons a pour valeur

$$\Theta = \frac{\dfrac{\partial f'(x,C)}{\partial C}}{f'(x,C)} = \frac{\partial \log[\pm f'(x,C)]}{\partial C}.$$

Si Θ restait fini pour $C = \psi(x)$, il en serait de même de

$$\int_{\psi}^{C} \Theta \, dC = \log \frac{f'(x, C)}{f'(x, \psi)},$$

ce qui est absurde; la valeur $C = \psi(x)$ annule le dénominateur de cette expression.

Ainsi la valeur $C = \psi(x)$ rend infinie la valeur de $\frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f}$, que l'on peut écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \infty.$$

En d'autres termes, les solutions particulières de (1) autres que celles de la forme $x =$ const. doivent satisfaire à l'équation

$$(6) \qquad \frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = 0.$$

On peut donc trouver ces solutions sans connaître l'intégrale générale de l'équation différentielle.

La proposée peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{F(x, y)};$$

donc notre analyse prouve que les solutions particulières autres que celle de la forme $y =$ const. satisferont à l'équation $\frac{\partial \frac{1}{F(x, y)}}{\partial x} = \infty$, ou à $\frac{1}{F^2(x, y)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \infty$, ou à $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \infty$, car $F(x, y) = 0$ donnerait, à cause

de (1), $\frac{dy}{dx} = 0$, ou $y =$ const., forme exclue, ou enfin à

$$(7) \qquad \frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}} = 0.$$

639. Les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$(8) \qquad \frac{\partial y'}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \infty,$$

en mettant y' pour $\frac{dy}{dx}$. Si donc la proposée est mise sous la forme

$$(9) \qquad \Psi\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(y', y, x) = 0,$$

l'équation (6) deviendra

$$(10) \qquad \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = 0,$$

et (7) sera

$$(11) \qquad \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = 0.$$

Si la proposée est préparée de manière que $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ne puissent être infinis, on aura simplement, pour les solutions particulières,

$$(12) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y'} = 0.$$

L'élimination de y' entre (9) et (10), ou entre (9) et (11), ou entre (9) et (12) donnera une équation que devra vérifier la solution particulière. Dans le cas où

l'équation (12) peut être employée, on voit que la solution particulière s'obtient en exprimant que l'équation différentielle a deux racines $\frac{dy}{dx}$ égales entre elles.

640. Mais il est bien évident que les valeurs de y fonctions de x pour lesquelles l'équation différentielle a des racines égales ne sont pas, en général, des solutions de cette équation.

Considérons le cas le plus simple, celui où l'équation est du second degré en $\frac{dy}{dx}$, et supposons-la résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Soit

$$\frac{dy}{dx} = P + \sqrt{Q},$$

P et Q étant deux fonctions quelconques des variables x et y. Les valeurs de y qui annulent Q ne vérifient l'équation $\frac{dy}{dx} = P$ que dans des cas exceptionnels; cela arrive, par exemple, en prenant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{2(ax+b^2)} + \frac{1}{2(ax+b^2)}\sqrt{a^2y^2 - 4b^2(ax+b^2)}.$$

La fonction $y = \frac{2b}{a}\sqrt{ax+b^2}$ qui annule le radical vérifie l'équation différentielle proposée. L'équation différentielle, mise sous forme entière, est

$$ay'(y - xy') - b^2(1+y'^2) = 0;$$

l'intégrale générale est donnée par l'équation

$$aC(y - Cx) - b^2(1 + C^2) = 0,$$

dans laquelle C représente une constante arbitraire.

641. Les résultats que nous venons d'obtenir permettent de reconnaître, en général, si une solution donnée $y=\varphi(x)$ d'une équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=\mathrm{F}(x,y)$$

est une solution particulière ou une intégrale particulière. Effectivement, désignons par z une variable nouvelle et posons

$$y=\varphi(x)+z;$$

l'équation différentielle transformée sera satisfaite par $z=0$; nous supposerons qu'elle puisse être mise sous la forme

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx}=z^{\mu}\Psi(x,z),$$

$\Psi(x,z)$ étant une fonction qui n'est ni nulle ni infinie pour $z=0$, et μ désignant un exposant positif. La question que nous avons à résoudre est donc de reconnaître la nature de la solution $z=0$. Or, pour qu'elle soit une solution particulière, il faut et il suffit que la dérivée de $z^{\mu}\Psi(x,z)$ relative à z soit infinie pour $z=0$; cette dérivée est

$$(3) \qquad \mu z^{\mu-1}\Psi(x,z)+z^{\mu}\Psi'(x,z),$$

en écrivant $\Psi'(x,z)$ au lieu de $\dfrac{d\Psi(x,z)}{dz}$.

Si l'on a $\mu>1$ ou $\mu=1$, le premier terme a une valeur finie pour $z=0$, et la même chose a lieu à l'égard du second terme, car on a, en nommant θ une quantité comprise entre 0 et 1,

$$(4) \qquad (\theta z)^{\mu}\Psi'(x,\theta z)=\theta^{\mu}z^{\mu-1}[\Psi(x,z)-\Psi(x,0)],$$

et l'un et l'autre membre de cette formule restent finis pour $z=0$, dans notre hypothèse. Ainsi la solution $z=0$ est une intégrale particulière de l'équation différentielle (2).

Si l'on a $\mu < 1$, le premier terme de l'expression (3) est infini pour $z = 0$, et son ordre infinitésimal est $1 - \mu$; il peut arriver que le second terme soit lui-même infini, mais d'après la formule (4) son ordre infinitésimal est inférieur à $1 - \mu$, en sorte qu'il ne peut y avoir de réduction entre les deux termes. Dans ce cas, la solution $z = 0$ est une solution particulière de l'équation (2), et, par conséquent, $y = \varphi(x)$ est une solution particulière de l'équation (1).

J'ajoute que l'on peut faire disparaître la solution particulière par un changement de variable. En effet, si l'on pose $z = u^{\frac{1}{1-\mu}}$, l'équation (2) deviendra

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} = (1 - \mu)\Psi\left(x, u^{\frac{1}{1-\mu}}\right),$$

et cette équation (5) n'admet plus la solution $z = 0$ ou $u = 0$. Cette remarque a été faite, pour la première fois, par Poisson.

642. Il nous reste encore une observation fort importante à présenter. La solution particulière représente l'enveloppe ou, si l'on veut, le lieu des intersections successives des courbes qui répondent aux diverses valeurs de la constante, dans l'intégrale générale. Or il peut arriver qu'une enveloppe ou l'une des courbes qui la composent fasse partie de la famille des enveloppées. On est alors dans le cas remarquable d'une solution qui a le double caractère de solution particulière et d'intégrale particulière; il ne sera pas inutile d'en présenter un exemple. Soit

$$y = C(x - C)^2$$

l'équation d'une famille d'enveloppées. La différentiation relative à C donne

$$(x - C)(x - 3C) = 0;$$

l'enveloppe se composera donc de deux courbes dont on aura les équations en remplaçant C par x et par $\frac{x}{3}$ dans l'équation des enveloppées; il vient ainsi

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{4x^3}{27}.$$

La solution $y = 0$ est un cas particulier des enveloppées, car elle répond au cas de $C = 0$.

Des solutions particulières des équations différentielles d'ordre supérieur au premier, déduites de l'une quelconque des intégrales premières.

643. Les considérations que nous venons de développer sont applicables aux équations différentielles de tous les ordres.

Posons

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = y^{(n)},$$

et considérons l'équation différentielle d'ordre n

$$(1) \qquad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Soit

$$(2) \qquad y^{(n-1)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, C)$$

l'une quelconque des n intégrales premières de l'équation (1), C étant la constante arbitraire. En différentiant l'équation (2), on obtient

$$(3) \qquad y^{(n)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}.$$

L'équation (1) doit devenir identique si l'on remplace $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$ par leurs valeurs tirées des équations (2)

et (3) ; ainsi l'équation

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}}y^{(n-2)}+\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}f=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)},f)$$

doit avoir lieu identiquement, quels que soient x, y, y', ..., $y^{(n-2)}$ et C.

Maintenant, si l'on regarde C comme une fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$, le deuxième membre de l'équation (2) pourra être regardé comme une fonction aussi arbitraire des mêmes quantités. Voyons si à ce point de vue l'équation (2) peut satisfaire à (1).

L'expression (3) de $y^{(n)}$ devra être augmentée de $\frac{\partial f}{\partial C}\frac{dC}{dx}$, et l'équation (4) devra persister si l'on ajoute au premier membre la même quantité : il faut donc que cette quantité soit nulle. Le facteur

$$\frac{dC}{dx}=0$$

donnerait C = const., ce qui répond à l'intégrale première.

On aura donc pour la solution particulière l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial C}=0,$$

d'où l'on tire la valeur de C en fonction des quantités x, $y, y', \ldots, y^{(n-2)}$. Si l'on porte ensuite ces valeurs dans l'équation (2), on aura la solution particulière.

On voit que cette solution est de la forme

$$(6)\qquad \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C}=0,\quad y^{(n-1)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)},C),$$

et que, si l'intégrale première est mise sous la forme

$$(7)\qquad \Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)},C)=0,$$

la solution particulière sera donnée par

$$(8)\qquad \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial C}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}}=0,\quad \Phi=0.$$

644. Il ne faut pas croire qu'à chaque intégrale première de l'équation (1) puisse répondre ainsi une solution particulière; il est facile de démontrer, au contraire, que, en appliquant la règle que nous venons d'établir à chacune des n intégrales premières, on obtient toujours la même solution particulière. En effet, soit

$$(9)\qquad \Phi_1(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)},B)=0$$

une deuxième intégrale première de l'équation (1), B étant la constante arbitraire. Si l'on élimine $y^{(n-1)}$ entre les deux équations (7) et (9), on obtiendra une équation d'ordre $n-2$,

$$(10)\qquad \Psi(x,y,y',\ldots,y^{(n-2)},B,C)=0,$$

qui sera une intégrale deuxième de l'équation (1); nous supposerons que l'on ait mis cette équation (10) sous une forme telle, que les dérivées partielles de Ψ ne puissent être infinies tant que les quantités qui figurent dans Ψ restent finies. Désignons par

$$(11)\qquad \Psi'(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)},B,C)=0$$

le résultat de la différentiation de l'équation (10); il est évident qu'on reproduira les équations (7) et (9) par l'élimination de B et par celle de C entre les équations (10) et (11). Par conséquent, si l'on imagine que B soit remplacé dans l'équation (11) par la valeur tirée de l'équation (10), cette équation (11) coïncidera avec

l'équation (7), et l'on pourra la faire servir au calcul de la dérivée partielle $\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C}$, qu'il faut égaler à zéro (n° 643) pour avoir la solution particulière qui répond à l'intégrale première (7).

Différentions donc les équations (10) et (11), en y considérant C comme une variable arbitraire, B et $y^{(n-1)}$ comme deux fonctions de cette variable; on aura

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C} + \frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{dB}{dC} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial C} + \frac{\partial \Psi'}{\partial B}\frac{dB}{dC} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y^{(n-1)}}\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = 0.$$

Éliminons $\frac{dB}{dC}$ entre ces deux équations; on obtient, à cause de $\frac{\partial \Psi'}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}}$,

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}}\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = \frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C}\frac{\partial \Psi'}{\partial B}.$$

Ainsi la solution particulière, calculée par l'une des intégrales premières (7) ou (9), est définie par l'équation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial B}\frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C}\frac{\partial \Psi'}{\partial B} = 0; \tag{12}$$

on obtiendra cette solution par l'élimination de B et de C entre les équations (10), (11), (12).

Des solutions particulières des équations différentielles d'ordre supérieur au premier, déduites de l'équation différentielle.

645. La solution particulière d'une équation différentielle d'ordre quelconque peut être déterminée, quand

elle existe, par l'équation différentielle elle-même, sans qu'il soit nécessaire de connaître aucune intégrale.

Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

et soit

$$(2)\qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C) = 0$$

une quelconque des n intégrales premières; en différentiant l'équation (2), on a

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + y^{(n)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

Supposons que l'on tire de l'équation (3) la valeur de C en fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ et qu'on la substitue dans l'équation (2); celle-ci deviendra l'équation différentielle elle-même, et on peut l'employer pour le calcul de la dérivée $y^{(n+1)}$ d'ordre $n+1$ qu'on obtiendrait directement par l'équation (1). Différentiant donc l'équation (2), on a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + y^{(n)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right) + \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + y'\frac{\partial C}{\partial y} + \ldots + y^{(n+1)}\frac{\partial C}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Mais la première partie du premier membre est nulle par l'équation (3), et l'on a simplement

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + y'\frac{\partial C}{\partial y} + \ldots + y^{(n+1)}\frac{\partial C}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.$$

Voilà donc sous quelle forme on peut mettre l'équation obtenue en différentiant la proposée (1); dans le cas de la solution particulière, elle est satisfaite identiquement et elle ne peut servir à déterminer $y^{(n+1)}$; effectivement on

a $\dfrac{\partial f}{\partial C} = 0$, pour une telle solution, si l'on suppose, ce qui est permis, que l'équation (2) soit résolue par rapport à $y^{(n-1)}$. Il serait facile au surplus de démontrer que la valeur de $y^{(n+1)}$ tirée de l'équation (4), après la suppression du facteur $\dfrac{\partial f}{\partial C}$, ne convient pas, en général, à la solution particulière.

Supposons que l'équation (1) ait été préparée de manière que son premier membre soit une fonction bien déterminée des quantités qui y figurent et dont les dérivées partielles restent finies; la différentiation donnera

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} + y^{(n+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

et, puisque cette équation ne saurait faire connaître la valeur de $y^{(n+1)}$ qui convient à la solution particulière, on aura nécessairement, pour cette solution,

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

et

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

646. Il nous reste une dernière remarque à présenter au sujet de la théorie des solutions particulières. Soit

$$(1) \qquad \Pi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

la solution particulière de l'équation d'ordre n

$$(2) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Si cette solution particulière est effectivement de l'ordre $n-1$, son intégrale générale renfermera $n-1$

constantes arbitraires, et cette intégrale satisfera à la proposée. La solution particulière peut elle-même avoir une solution particulière, mais il est très-important de remarquer que cette solution ne satisfait pas, en général, à la proposée.

En effet, par hypothèse, l'équation (2) est bien satisfaite quand on y substitue les valeurs de $y^{(n-1)}$ et de $y^{(n)}$ tirées de l'équation (1) et de celle qu'on en déduit par la différentiation; mais cette dernière équation est

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial \Pi}{\partial y^{(n-1)}} = 0,$$

et elle cesse de déterminer $y^{(n)}$, comme on l'a vu au numéro précédent, quand il s'agit de la solution particulière de l'équation (1).

Application de la théorie précédente à un exemple.

647. Je crois devoir éclaircir, par un exemple, l'importante théorie que nous venons de présenter. Soit l'équation

$$(1) \qquad y - ax^2 - bx - 4a^2 - b^2 = 0,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires et que Lagrange a considérée dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*. On en tire

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} - 2ax - b = 0.$$

L'élimination de b donne

$$(3) \quad \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y\right] - a\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right) + 4a^2(1 + x^2) = 0,$$

et l'on a, par celle de a,

$$(4)\qquad \left[2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2yx^2\right] - b\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right) + 2b^2(1+x^2) = 0.$$

Ensuite l'équation (2) donne

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2a = 0,$$

d'où $a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$. En portant cette valeur de a dans l'équation (3), il vient

$$(6)\qquad (1+x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

L'équation (6) est une équation différentielle du deuxième ordre; les équations (3) et (4) sont ses intégrales premières, l'équation (1) est son intégrale générale.

En exprimant l'égalité des racines a de l'équation (3) ou celle des racines b de l'équation (4), on trouve la solution particulière de l'équation (6), savoir :

$$(7)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - (1+x^2)y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Si l'on veut tirer cette équation (7) de l'équation différentielle (6), on différentiera cette dernière, et l'on trouvera

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4}\right] = 0.$$

En égalant à zéro le coefficient de $\frac{d^3y}{dx^3}$, on a

$$(8)\qquad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4} = 0;$$

enfin l'élimination de $\frac{d^2y}{dx^2}$ entre les équations (6) et (8) donne l'équation (7), que nous venons d'obtenir par le moyen des intégrales premières.

Si l'on résout l'équation (7) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + x^3}{4} + \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}}{4},$$

et l'on peut écrire

$$\frac{8\frac{dy}{dx} + 4x + 2x^3}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} - 2\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Or la première partie du premier membre est la dérivée du radical $\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}$, tandis que la seconde partie $2\sqrt{1+x^2}$ est la dérivée de

$$x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Donc la solution particulière (7) s'obtient en différentiant l'équation

$$(9)\qquad \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1+x^2} - \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \text{H},$$

où H désigne une constante arbitraire; en d'autres termes, l'équation (9) est l'intégrale générale de cette solution particulière.

L'équation (7) a elle-même une solution particulière, et on peut la tirer de son intégrale générale (9). Comme celle-ci est résolue par rapport à la constante arbitraire, il suffira d'égaler à l'infini la dérivée de son premier membre prise par rapport à y. On trouve ainsi

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}.$$

Cette valeur de y satisfait bien à l'équation (7), mais elle ne vérifie pas l'équation (1).

Sur une classe remarquable d'équations différentielles.

648. En terminant ce Chapitre, je présenterai quelques notions très-sommaires relatives à une classe d'équations différentielles étudiées d'abord par Lagrange et dont j'ai donné une théorie très-développée dans un Mémoire qui fait partie du Tome XVIII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Soient x, y deux variables; y', y'', ... les dérivées successives de y; α et β deux constantes arbitraires. Si les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \beta \end{cases}$$

sont deux intégrales premières d'une même équation différentielle $V = 0$, et que

$$(2)\qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \alpha, \beta) = 0$$

en résulte par l'élimination de $y^{(n)}$, cette dernière sera une intégrale deuxième de l'équation $V = 0$. J'ajoute que la même équation (2) sera une intégrale première de l'équation

$$(3)\qquad F(\varphi, \psi) = 0,$$

où F désigne une fonction quelconque, pourvu que l'on y considère α et β comme des constantes liées entre elles par l'équation

$$(4)\qquad F(\alpha, \beta) = 0.$$

Effectivement, si l'on résout par rapport à α et β le système formé de l'équation (2) et de celle qu'on en déduit par la différentiation, on trouvera, par notre hypothèse, $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, et, puisqu'on suppose α et β liés par l'équation (4), il est clair que l'équation (3) sera satisfaite.

Maintenant, pour avoir la solution particulière de l'équation (3), on peut employer son intégrale première (2). Nous supposerons cette intégrale écrite de telle manière que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ne puisse devenir infinie; alors il suffira de différentier l'équation (2) par rapport à l'arbitraire α, en regardant β comme une fonction de α; il vient ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta = 0,$$

et il en résulte, par l'élimination du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$,

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0;$$

cette équation (5) est précisément la solution particulière demandée.

649. Exemple I. — Supposons qu'on demande de trouver une courbe plane, connaissant la courbe lieu des centres de courbure.

Si l'on désigne par x, y les coordonnées de la courbe demandée, par α, β celles du centre de courbure, on

aura (n° 195)

$$(1)\qquad \alpha = x - \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \beta = y + \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

si donc

$$(2)\qquad F(\alpha, \beta) = 0$$

est l'équation de la courbe donnée, l'équation différentielle du problème sera

$$(3)\qquad F\left(x - \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx},\ y + \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right) = 0;$$

elle est du deuxième ordre. Mais, si l'on regarde α et β comme des constantes arbitraires, les équations (1) seront deux intégrales premières de la même équation du troisième ordre

$$(4)\qquad \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0;$$

on est donc ici dans le cas considéré au numéro précédent. En éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ entre les équations (1), on obtient

$$(5)\qquad (\alpha - x) + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

et cette équation est une intégrale première de l'équation (3), α et β étant des constantes liées entre elles par l'équation (2). Le premier membre de l'équation (5) est, à un facteur constant près, la dérivée de

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

si donc on désigne par R une nouvelle constante arbi-

traire, l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mathrm{R}^2,$$

α et β étant liés par l'équation (2). La solution générale du problème proposé est donc donnée par une circonférence de rayon arbitraire et dont le centre est en un point arbitraire de la courbe donnée. Mais, au point de vue de la Géométrie, ce n'est pas là la vraie solution; celle-ci n'est autre chose que la solution particulière de l'équation (3). Pour l'obtenir, il faut différentier l'équation (5) en regardant α et β comme seules variables, ce qui donne

$$(6)\qquad \frac{d\beta}{d\alpha}\,\frac{dy}{dx}+1=0,$$

le rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$ devant être tiré de l'équation (2). L'équation (6), qui n'est que du premier ordre, est précisément celle qu'il faut poser quand on se propose de trouver les développantes de la courbe donnée.

650. Exemple II. — Proposons-nous de trouver les lignes de courbure d'une surface de deuxième ordre à centre.

L'équation de la surface donnée étant

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan xy sera (n° 341), en faisant $dy=y'dx$,

$$(2)\qquad \frac{c^2}{\rho^2}\left(x^2-\frac{xy}{y'}\right)-\frac{c^2-b^2}{\rho^2-b^2}(y^2-xyy')-b^2=0$$

ou

$$(3)\qquad \alpha-\beta-b^2=0,$$

en posant

$$(4)\qquad \frac{c^2}{\rho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) = \alpha,\quad \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}(y^2 - xyy') = 6.$$

Or, quand on regarde α et 6 comme des constantes arbitraires, les précédentes équations s'accordent à donner, par la différentiation,

$$xyy'' - yy' + xy'^2 = 0;$$

elles sont donc deux intégrales premières de cette dernière équation, et l'on peut appliquer à l'équation (2) le théorème du n° 648. En éliminant y' entre les équations (4), on trouve

$$\frac{c^2}{\rho^3}\frac{x^2}{\alpha} + \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}\frac{y^2}{6} = 1;$$

α et 6 étant liés par l'équation (3), nous poserons $\alpha = \mu^2$, $6 = \mu^2 - b^2$, et l'équation des projections des lignes de courbure sera finalement

$$(5)\qquad \frac{c^2x^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{(c^2 - b^2)y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} = 1,$$

μ^2 étant la constante arbitraire.

Comme cette équation (5) est symétrique par rapport à ρ et μ, si l'on considère ρ comme un paramètre variable et μ comme une quantité déterminée, elle représentera également les projections des lignes de courbure de la surface

$$(6)\qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

et, si ρ et μ ont en même temps des valeurs déterminées, l'équation (5) représentera la projection d'une ligne de courbure commune aux surfaces (1) et (6), laquelle sera donc l'intersection de ces deux surfaces.

Si dans l'équation (1) on a $\rho > c > b$, μ devra être compris entre b et c, ou inférieur à c, car autrement les deux surfaces ne se couperaient pas. On conclut de là que les trois équations

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

dans lesquelles b et $c > b$ sont des constantes déterminées, ρ, μ, ν trois paramètres variables, compris, le premier entre c et ∞, le deuxième entre b et c et le troisième entre o et b, représentent un système de trois familles telles, que l'une quelconque des surfaces de l'une des familles est coupée, suivant ses lignes de courbure, par toutes les surfaces des deux autres familles, propriété que nous avons déjà démontrée au moyen du théorème de Dupin (n° 338).

651. Exemple III. — L'équation

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

sur laquelle nous reviendrons dans le Chapitre suivant, appartient à la classe de celles dont nous nous occupons, car les équations

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad y - x\frac{dy}{dx} = \beta,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires, sont les intégrales premières de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

En éliminant $\frac{dy}{dx}$, on a

$$y = \alpha x + \beta,$$

ce qui est l'intégrale générale de la proposée quand on regarde β et α comme liés par l'équation

$$\beta = f(\alpha).$$

La solution particulière s'obtiendra évidemment en éliminant α entre les deux équations

$$y = \alpha x + f(\alpha), \quad 0 = x + f'(\alpha).$$

CHAPITRE VII.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE A DEUX VARIABLES.

De la séparation des variables.

652. Après avoir exposé les principes généraux de la théorie des équations différentielles, nous devons examiner les cas dans lesquels on sait trouver les intégrales. Nous ne nous occuperons, dans ce Chapitre, que des équations du premier ordre à deux variables.

Le cas le plus simple est celui dans lequel les variables sont *séparées;* alors l'intégration de l'équation différentielle ne dépend que des quadratures. Nous disons que les variables sont séparées dans une équation différentielle lorsque cette équation est ramenée à la forme

$$X + Y\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$(1)\qquad X\,dx + Y\,dy = 0,$$

X étant une fonction donnée de x et Y une fonction donnée de y. Si l'on désigne par x_0 et y_0 des quantités déterminées quelconques, par C une constante arbitraire, l'intégrale générale de l'équation (1) sera évidemment

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y\,dy = C.$$

On peut même prendre pour cette intégrale

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{x} X\,dx + \int_{y_0}^{y} Y\,dy = 0,$$

x_0 étant une valeur déterminée quelconque et y_0 désignant une constante arbitraire; cette constante est précisément la valeur que prend y quand on donne à x la valeur x_0.

Le problème qui a pour objet l'intégration d'une équation différentielle doit être regardé comme résolu lorsque les variables sont séparées; on parvient quelquefois à effectuer la séparation par le moyen d'un changement de variables; on en verra divers exemples dans ce Chapitre.

Si l'équation $\frac{1}{X} = 0$ a la racine a, l'équation différentielle (1) admettra évidemment la solution $x = a$, qui sera, suivant les cas (n° 641), une solution particulière ou une intégrale particulière. De même, si l'équation $\frac{1}{Y} = 0$ admet une racine b, l'équation proposée aura la solution particulière ou l'intégrale particulière $y = b$.

653. Exemples. — 1° Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 - y^2}{1 - x^2} = 0;$$

on peut lui donner la forme

$$\frac{dx}{1 - x^2} + \frac{dy}{1 - y^2} = 0,$$

et son intégrale est

$$\int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1 - y^2} = C.$$

Or on a

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

et de même

$$\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Si donc on écrit $\log\sqrt{C}$ au lieu de C, l'intégrale précédente deviendra

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = C.$$

L'hypothèse $C=0$ donne les intégrales particulières $x=-1$, $y=-1$; l'hypothèse $C=\infty$ donnera les deux autres intégrales particulières $x=+1$, $y=+1$, ce qui s'accorde avec les résultats établis au n° 641.

2° Soit en second lieu l'équation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$$

on peut lui donner la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

et elle a pour intégrale générale

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C,$$

C étant la constante arbitraire. Si l'on prend les sinus des deux membres, il viendra

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C.$$

Comme dans l'exemple précédent, l'équation différentielle proposée est satisfaite en posant $x=\pm 1$, $y=\pm 1$; mais on voit que ces solutions sont ici des solutions particu-

lières et non des intégrales particulières, car l'intégrale générale ne peut devenir identique pour aucune valeur de la constante arbitraire quand on y suppose $x = \pm 1$ ou $y = \pm 1$; cette conclusion est conforme à la théorie du n° 641.

Intégration des équations de la forme $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

654. Lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle de la forme

(1) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

on arrive à séparer les variables par le moyen de la substitution

(2) $$y = zx,$$

z étant une nouvelle variable.

En effet, on a

(3) $$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z,$$

et, en substituant les précédentes valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (1), elle devient

(4) $$x\frac{dz}{dx} + z = f(z),$$

d'où

$$\frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0.$$

On aura donc, en intégrant et en désignant par C une constante arbitraire,

(5) $$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = C$$

ou

(6) $$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \log\frac{x}{x_0} = C,$$

Les valeurs x_0 et z_0 peuvent être choisies à volonté ; si l'on regarde z_0 comme une constante arbitraire, on peut écrire plus simplement

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z) - z} - \log \frac{x}{x_0} = 0,$$

ainsi que nous l'avons déjà dit au n° 652.

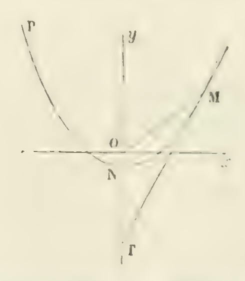
Il est évident que l'équation

$$P + Q \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad P\,dx + Q\,dy = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions homogènes d'un même degré des deux variables x et y, a la même forme que l'équation (1), car le rapport $\frac{P}{Q}$ est une fonction homogène du degré zéro des variables x, y, et, par conséquent, on peut poser

$$\frac{P}{Q} = -f\left(\frac{y}{x}\right).$$

653. Exemple I. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe* MNP *telle que le rayon vecteur* OM *soit égal à la distance* OT *de*



l'origine des coordonnées au point T *où la tangente en* M *rencontre l'axe des* y.

L'équation de la tangente MT au point $M(x, y)$ est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

et, si l'on y fait $X = 0$, $Y = -\sqrt{x^2 + y^2}$, on obtiendra l'équation différentielle de la courbe cherchée, savoir :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Posons

$$y = xz, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z;$$

l'équation précédente devient

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x};$$

les variables sont séparées, et, comme on a

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{const.}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) + \text{const.},$$

l'intégrale sera

$$\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = \log x - \log C,$$

$\log C$ étant la constante arbitraire. On peut écrire aussi

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{C},$$

et, en prenant les inverses des deux membres,

$$-z + \sqrt{1 + z^2} = \frac{C}{x}.$$

Retranchant enfin la dernière équation de la précédente, il vient

$$2z = \frac{x}{C} - \frac{C}{x},$$

ou, en remettant $\frac{y}{x}$ au lieu de z,

$$x^2 - 2Cy - C^2 = 0.$$

Cette équation représente des paraboles qui ont pour foyer l'origine des coordonnées et dont l'axe coïncide avec l'axe des y. En différentiant par rapport à C, il vient

$$y + C = 0,$$

ce qui donne la solution particulière imaginaire

$$x^2 + y^2 = 0;$$

l'équation différentielle du problème est effectivement satisfaite quand on pose $y = x\sqrt{-1}$.

656. Exemple II. — *Trouver l'intégrale de l'équation différentielle*

$$(ax + by)\,dx + (a'x + b'y)\,dy = 0,$$

dans laquelle a, b, a', b' désignent des constantes données.

Par la substitution

$$y = xz, \quad dy = x\,dz + z\,dx,$$

l'équation proposée devient

$$\frac{(a' + b'z)\,dz}{a + (b + a')z + b'z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

ou

$$2\frac{dx}{x} + \frac{(b + a') + 2b'z}{a + (b + a')z + b'z^2}\,dz + \frac{a' - b}{a + (b + a')z + b'z^2}\,dz = 0.$$

Les deux premiers termes de cette équation forment la différentielle de la somme

$$\log x^2 + \log\left[a + (b + a')z + b'z^2\right] = \log\left[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2\right];$$

on a donc, par l'intégration,

$$\log[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \int \frac{(a' - b)\,dz}{a + (b + a')z + b'z^2} = \text{const.}$$

Si l'on pose

$$(a' - b)^2 - 4(ab' - ba') = \pm \mathrm{H}$$

H étant une quantité positive, le dernier terme de la formule précédente aura pour valeur

$$\frac{a' - b}{\sqrt{\mathrm{H}}} \log \frac{2b'z + b + a' - \sqrt{\mathrm{H}}}{2b'z + b + a' + \sqrt{\mathrm{H}}}$$

ou

$$\frac{2(a' - b)}{\sqrt{\mathrm{H}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2b'z + b + a'}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

selon que $\pm \mathrm{H}$ sera positif ou négatif. L'intégrale de l'équation proposée sera donc, dans le premier cas,

$$\log[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{a' - b}{\sqrt{\mathrm{H}}} \log \frac{2b'y + (b + a' - \sqrt{\mathrm{H}})x}{2b'y + (b + a' + \sqrt{\mathrm{H}})x} = \mathrm{C},$$

et, dans le second cas,

$$\log[ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{2(a' - b)}{\sqrt{\mathrm{H}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2b'y + (b + a')x}{x\sqrt{\mathrm{H}}} = \mathrm{C},$$

C désignant la constante arbitraire. Dans le cas de $\mathrm{H} = 0$, le dernier terme est algébrique, et l'on reconnaît facilement qu'il a pour valeur

$$\frac{-2(a' - b)x}{2b'y + (b + a')x}.$$

Il est évident que l'intégrale de l'équation proposée ne peut être algébrique que si la quantité $\pm \mathrm{H}$ est positive,

et, dans ce cas, il faut en outre que l'on ait

$$\frac{a'-b}{\sqrt{\mathrm{H}}}=\frac{m}{n},$$

m et n étant des nombres entiers.

657. Exemple III. — *Trouver l'integrale de l'équation différentielle*

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0.$$

L'équation dont il s'agit n'est pas homogène par rapport aux variables x, y, mais on peut la ramener à la forme des équations homogènes par un changement de variables. Posons

$$x=x_0+x',\quad y=y_0+y',$$

x' et y' étant les nouvelles variables, et déterminons les constantes x_0, y_0 par les équations

$$ax_0+by_0+c=0,\quad a'x_0+b'y_0+c'=0.$$

L'équation transformée sera

$$(ax'+by')dx'+(a'x'+b'y')dy'=0,$$

et elle coïncide avec celle de l'exemple précédent.

On peut encore procéder comme il suit. Posons

$$ax+by+c=u,\quad a'x+b'y+c'=v,$$

u et v étant de nouvelles variables; on aura

$$x=\frac{b'(u-c)-b(v-c')}{ab'-ba'},\qquad y=\frac{a(v-c')-a'(u-c)}{ab'-ba'},$$

et l'équation proposée deviendra

$$u(b'du-b\,dv)+v(a\,dv-a'du)=0$$

ou

$$(b'u-a'v)du+(av-bu)dv=0,$$

ce qui est une équation homogène par rapport aux variables u et v.

Les deux transformations que nous venons d'employer ne sont pas praticables lorsque

$$ab' - ba' = 0;$$

alors on a

$$b' = \frac{ba'}{a},$$

et l'équation proposée est

$$(ax + by + c)\,dx + \left[\frac{a'}{a}(ax + by) + c'\right] dy = 0.$$

Pour séparer les variables, il suffit de poser

$$ax + by = z, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{dz - a\,dx}{b};$$

l'équation devient alors

$$a\,dx + \frac{(a'z + ac')\,dz}{(b - a')z + (bc - ac')} = 0,$$

et les variables sont séparées. Ce résultat persiste dans le cas de $a' = 0$, $b' = 0$; mais, si l'on a $a = 0$, $b = 0$, il faudra employer la transformation

$$a'x + b'y = z.$$

Intégration de l'équation linéaire du premier ordre.

658. Une équation différentielle du premier ordre est dite *linéaire* lorsqu'elle est du premier degré relativement à l'une des variables et à sa dérivée; une telle équation est donc de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0,$$

X et X_1 étant des fonctions données de la variable indépendante x.

On peut intégrer facilement l'équation (1) en y exécutant la séparation des variables. A cet effet, posons

$$(2)\qquad y = \theta z,$$

z étant une nouvelle variable et θ désignant une fonction de x que nous nous réservons de déterminer à volonté. L'équation (2) donne

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\theta}{dx},$$

et, en substituant les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (1), on obtient

$$(4)\qquad \theta\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + X\theta\right) + X_1 = 0.$$

Maintenant nous pouvons déterminer la fonction θ par la condition qu'elle satisfasse à l'équation

$$(5)\qquad \frac{d\theta}{dx} + X\theta = 0,$$

et l'assujettir en outre à se réduire à l'unité pour $x = x_0$. L'équation (5) est une équation différentielle dans laquelle on peut séparer les variables en l'écrivant comme il suit,

$$\frac{d\theta}{\theta} + X\,dx = 0,$$

et l'on en conclut

$$(6)\qquad \log\theta = -\int_{x_0}^{x} X\,dx,\quad \theta = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx}.$$

Ensuite, à cause de l'équation (5), l'équation (4) se réduit à

$$\theta \frac{dz}{dx} + X_1 = 0 \quad \text{ou} \quad dz + \frac{X_1\,dx}{\theta} = 0;$$

les variables sont encore séparées, et l'intégration donne

$$z = -\int_{x_0}^{x} \frac{X_1\,dx}{\theta} + C,$$

C étant la constante arbitraire. On a donc, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$(7) \qquad y = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx}\left[C - \int e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} X_1\,dx\right].$$

D'après les résultats obtenus aux nos 639 et suivants, il est évident que les équations linéaires ne peuvent pas avoir de solutions particulières.

659. Exemple I. — *On demande d'intégrer l'équation différentielle*

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = a,$$

a étant une constante donnée.

On a ici

$$X = -\frac{x}{1 + x^2}, \quad X_1 = -\frac{a}{1 + x^2},$$

d'où

$$-\int_0^x X\,dx = \log\sqrt{1 + x^2}, \quad \theta = \sqrt{1 + x^2},$$

puis

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = -a\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-ax}{\sqrt{1 + x^2}} + \text{const.}$$

l'intégrale demandée est donc

$$y = ax + C\sqrt{1+x^2},$$

C étant la constante arbitraire.

660. Exemple II. — *On demande d'intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

On a ici

$$X = \frac{2}{x}, \quad X_1 = -\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

puis

$$\int_1^x X\,dx = 2\log x, \quad \theta = \frac{1}{x^2},$$

ensuite

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = \int x^2 X_1\,dx = \frac{x^3}{3}X_1 - \frac{1}{3}\int x^3 \frac{dX_1}{dx}\,dx;$$

d'ailleurs

$$\int x^3 \frac{dX_1}{dx}\,dx = -\int x^2 \sin x\,dx$$
$$= (x^2-2)\cos x - 2x\sin x + \text{const.};$$

donc

$$\int \frac{X_1}{\theta}\,dx = -\frac{x^3}{3}\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$$
$$- \frac{x^2-2}{3}\cos x + \frac{2}{3}x\sin x + \text{const.};$$

l'intégrale demandée est donc

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3}\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{x^2-2}{3x^2}\cos x - \frac{2}{3}\frac{\sin x}{x},$$

C étant la constante arbitraire.

D'une classe d'équations différentielles réductibles à la forme linéaire.

661. Les équations de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0,$$

où X et X_1 désignent des fonctions données de x, se ramènent à la forme linéaire par la substitution

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z, \quad \text{d'où} \quad y^{-n}\,dy = dz;$$

effectivement, l'équation proposée divisée par y^n devient

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Xy^{1-n} + X_1 = 0,$$

et, par notre substitution, on trouve

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Xz + X_1 = 0,$$

ce qui est une équation linéaire.

Au reste, il est inutile d'opérer la réduction, et on peut appliquer directement à l'équation (1) le procédé d'intégration dont nous avons fait usage au n° 658. Si l'on pose

$$y = \theta z, \quad \frac{dy}{dx} = \theta\frac{dz}{dx} + z\frac{d\theta}{dx},$$

l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad \theta\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{d\theta}{dx} + \theta X\right) + X_1\theta^n z^n = 0,$$

et cette équation se réduira à la suivante:

$$(3) \qquad \frac{dz}{dx} + X_1\theta^{n-1}z^n = 0,$$

si l'on détermine θ de manière que l'on ait

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta X = 0. \tag{4}$$

L'équation (4) donne, comme au n° 658,

$$\frac{d\theta}{\theta} + X\,dx = 0, \quad \theta = e^{-\int_{x_0}^{x} X\,dx};$$

ensuite l'équation (3) devient, en séparant les variables,

$$\frac{dz}{z^n} + X_1 \theta^{n-1}\,dx = 0.$$

Intégrant et désignant par C la constante, il vient

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = -\int_{x_0}^{x} X_1 \theta^{1-n}\,dx + C;$$

l'intégrale de l'équation (1) est donc

$$y^{1-n} = (1-n)\,e^{-(1-n)\int_{x_0}^{x} X\,dx}\left[-\int_{x_0}^{x} e^{(1-n)\int_{x_0}^{x} X\,dx} X_1\,dx + C\right].$$

D'une classe d'équations dont on peut déterminer l'intégrale générale quand on connaît une intégrale particulière.

662. Les équations différentielles dont je veux parler ici ont la forme

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

X, X_1, X_2 étant des fonctions données de x. Si l'on satisfait à l'équation (1) en posant $y = Y$, Y étant une

fonction donnée de x, on pourra trouver l'intégrale générale. Pour cela, il suffira de poser

$$y = Y + z, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} + \frac{dz}{dx},$$

z étant une nouvelle variable. Comme on a, par hypothèse,

$$\frac{dY}{dx} + XY^2 + X_1 Y + X_2 = 0,$$

l'équation transformée en z sera

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx} + (X_1 + 2XY) z + X z^2 = 0.$$

Cette équation (2) est comprise dans celle que nous avons considérée au numéro précédent, et elle répond au cas de $n = 2$; on pourra donc obtenir son intégrale générale en appliquant l'un ou l'autre des procédés que nous avons indiqués.

Par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y - (Xx^2 + X_1 x + 1) = 0,$$

est satisfaite quand on pose $y = x$; donc la substitution

$$y = x + z$$

ramènera cette équation à la suivante :

$$\frac{dz}{dx} + (X_1 + 2Xx) z + X z^2 = 0.$$

De l'équation de Riccati.

663. L'équation dite *de Riccati* appartient à la classe de celles dont il a été question au numéro précédent;

cette équation est la suivante :

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m, \tag{1}$$

a et b étant des coefficients constants.

Dans le cas de $m = 0$, les variables se séparent immédiatement ; on a

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a\,dx = 0,$$

d'où, en intégrant et en désignant par c une constante,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\log\frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x - c) = 0.$$

Si l'on résout par rapport à y, on trouvera

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} + e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}}{e^{a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}} - e^{-a(x-c)\sqrt{\frac{b}{a}}}};$$

lorsque $\frac{b}{a}$ est négatif, on peut écrire (n° 368)

$$y = \sqrt{-\frac{b}{a}}\cot\left[a(x - c)\sqrt{-\frac{b}{a}}\right].$$

L'équation (1) est intégrable, dans certains cas, par le moyen des fonctions algébriques et logarithmiques ou circulaires ; la marche que nous allons suivre dans cette recherche consiste à ramener l'équation différentielle à une autre de même forme, et dans laquelle l'exposant m soit nul.

664. Nous ferons d'abord la transformation suivante :

$$y = My' + N,$$

y' étant une nouvelle variable et M, N désignant des fonctions de x que nous pourrons déterminer à volonté ; on aura aussi

$$\frac{dy}{dx} = M\frac{dy'}{dx} + y'\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx},$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), il viendra

$$M\frac{dy'}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN\right)y' + aM^2y'^2 + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m\right) = 0.$$

Posons maintenant, pour déterminer M et N,

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 = 0, \quad \frac{dM}{dx} + 2aMN = 0.$$

Dans la première de ces équations, les variables se séparent immédiatement ; on peut écrire

$$\frac{dN}{N^2} + a\,dx = 0,$$

et il en résulte

$$-\frac{1}{N} + ax = \text{const.}$$

Nous prendrons

$$N = \frac{1}{ax};$$

l'autre équation devient alors

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2M}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dM}{M} + \frac{2\,dx}{x} = 0,$$

et, en intégrant,

$$\log M + \log x^2 = \text{const.} \quad \text{ou} \quad M x^2 = \text{const.};$$

nous prendrons

$$M = \frac{1}{x^2},$$

en sorte que la transformation employée sera

$$(2) \qquad y = \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{ax},$$

et elle donnera pour transformée

$$(3) \qquad \frac{dy'}{dx} + \frac{a}{x^2} y'^2 - b x^{m+2} = 0.$$

Dans le cas de $m = -2$, cette équation devient

$$\frac{dy'}{dx} = b - a \frac{y'^2}{x^2};$$

et, comme le second membre est une fonction du seul rapport $\frac{y'}{x}$, elle est intégrable par le procédé du n° 654. Ainsi notre transformation permet d'intégrer l'équation de Riccati lorsque $m = -2$.

L'équation (3) n'a plus la forme de la proposée, mais on peut l'y ramener par un nouveau changement de variables ; nous ferons

$$(4) \qquad y' = \frac{1}{y_1}, \quad x = x_1^{\frac{1}{m+3}},$$

d'où

$$dy' = -\frac{dy_1}{y_1^2}, \quad dx = \frac{1}{m+3} x_1^{-\frac{m+2}{m+3}} dx_1;$$

si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), et que

l'on fasse, pour abréger,

$$(5)\qquad a_1 = \frac{b}{m+3},\quad b_1 = \frac{a}{m+3},\quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3},$$

il viendra

$$(6)\qquad \frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}.$$

Cette équation est toute semblable à l'équation (1); elle est intégrable lorsque $m_1 = 0$, ce qui donne $m = -4$; donc l'équation (1) est elle-même intégrable dans cette hypothèse.

665. La transformation par laquelle on passe de l'équation (1) à l'équation (6) peut être appliquée à celle-ci, et, en poursuivant la même marche, on obtiendra une infinité de transformées successives, qu'on peut représenter d'une manière générale par

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i y_i^2 = b_i x_i^{m_i}.$$

Si l'on rencontre une transformée dans laquelle m_i soit nul, cette transformée sera intégrable comme on l'a vu, et toutes les transformées qui précèdent le seront aussi. Il est facile de trouver les cas dans lesquels cette circonstance se présente.

Désignons par θm la fonction de m définie par la formule

$$\theta m = -\frac{m+4}{m+3},$$

et faisons, pour abréger,

$$\theta\theta m = \theta^2 m,\quad \theta\theta^2 m = \theta^3 m,\quad \ldots;$$

il est évident que l'on aura

$$m_i = \theta^i m,$$

et l'on trouve (*voir* mon *Cours d'Algèbre supérieure*, 4[e] édition, t. II, p. 356)

$$m_i = -\frac{(2i-1)m+4i}{m+(2i+1)};$$

cette formule s'accorde avec les formules (5) pour $i=1$; et il est facile de s'assurer que, si elle a lieu pour un indice i, elle subsiste pour l'indice $i+1$.

D'après cela, pour que l'on trouve $m_i=0$, il faut que l'on ait

$$(7) \qquad m = -\frac{4i}{2i-1}.$$

Lorsque le nombre m a cette forme, i étant un entier positif, l'équation de Riccati est intégrable par le moyen des fonctions algébriques et logarithmiques ; mais il existe, comme on va voir, un autre cas d'intégrabilité.

En effet, si l'on fait la substitution

$$y=\frac{1}{Y}, \quad x = X^{\frac{1}{m+1}}$$

dans l'équation proposée (1), on trouvera la transformée

$$\frac{dY}{dX}+\frac{b}{m+1}Y^2 = aX^{\frac{-m}{m+1}},$$

qui a encore la même forme, et, d'après ce qui précède, cette transformée et la proposée seront intégrables si l'on a

$$\frac{-m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1} \quad \text{ou} \quad m = -\frac{4i}{2i+1}.$$

Donc, en résumé, nous savons intégrer l'équation de Riccati lorsque le nombre m a la forme

$$m = \frac{-4i}{2i\pm 1},$$

i étant un entier positif; le cas de $m = -2$ considéré plus haut répond à $i = \infty$.

De l'équation $L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$, *dans laquelle* L, M, N *désignent des fonctions linéaires.*

666. L'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

s'intègre aisément (n° 657) lorsque P et Q sont des fonctions linéaires des deux variables x et y. Euler et d'autres géomètres après lui ont étudié le cas où P et Q sont des fonctions entières du deuxième degré, mais ils n'ont pu trouver l'intégrale qu'en restreignant la généralité des polynômes P et Q.

Les équations différentielles de la forme dont nous parlons, et que l'on était parvenu à intégrer, sont comprises, comme cas particulier, dans une équation générale dont nous allons nous occuper et pour laquelle Jacobi a donné le premier une méthode d'intégration. L'équation dont il s'agit est la suivante :

$$(1) \qquad L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

où L, M, N désignent des fonctions linéaires données, savoir

$$(2) \qquad \begin{cases} L = A + A'x + A''y, \\ M = B + B'x + B''y, \\ N = C + C'x + C''y, \end{cases}$$

A, A', ... étant des constantes données. La méthode que je vais exposer ne diffère pas au fond de celle que Jacobi a fait connaître.

Soient

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= a + bx + cy,\\ U' &= a' + b'x + c'y,\\ U'' &= a'' + b''x + c''y \end{aligned}\right.$$

trois fonctions linéaires dont les coefficients sont indéterminés ; posons en outre

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= b'c'' - b''c', & \beta &= c'a'' - c''a', & \gamma &= a'b'' - a''b',\\ \alpha' &= b''c - bc'', & \beta' &= c''a - ca'', & \gamma' &= a''b - ab'',\\ \alpha'' &= bc' - b'c, & \beta'' &= ca' - c'a, & \gamma'' &= ab' - a'b \end{aligned}\right.$$

et

$$(5)\qquad \Delta = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b');$$

on aura évidemment

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' &= \Delta,\\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0,\\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0,\\ b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0,\\ b\beta + b'\beta' + b''\beta'' &= \Delta,\\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0,\\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0,\\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0,\\ c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' &= \Delta, \end{aligned}\right.$$

et à cause de ces relations, les formules (3) donneront

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta &= \alpha U + \alpha' U' + \alpha'' U'',\\ \Delta x &= \beta U + \beta' U' + \beta'' U'',\\ \Delta y &= \gamma U + \gamma' U' + \gamma'' U''. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger l'écriture,

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = A\alpha + A'\beta + A''\gamma, \\ \mathcal{A}' = A\alpha' + A'\beta' + A''\gamma', \\ \mathcal{A}'' = A\alpha'' + A'\beta'' + A''\gamma'', \\ \mathcal{B} = B\alpha + B'\beta + B''\gamma, \\ \mathcal{B}' = B\alpha' + B'\beta' + B''\gamma', \\ \mathcal{B}'' = B\alpha'' + B'\beta'' + B''\gamma'', \\ \mathcal{C} = C\alpha + C'\beta + C''\gamma, \\ \mathcal{C}' = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma', \\ \mathcal{C}'' = C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma'', \end{cases}$$

et que l'on ajoute les équations (7), après les avoir multipliées respectivement par A, A', A'', puis par B, B', B'', puis enfin par C, C', C'', on aura

$$(9)\quad \begin{cases} \Delta L = \mathcal{A}U + \mathcal{A}'U' + \mathcal{A}''U'', \\ \Delta M = \mathcal{B}U + \mathcal{B}'U' + \mathcal{B}''U'', \\ \Delta N = \mathcal{C}U + \mathcal{C}'U' + \mathcal{C}''U''. \end{cases}$$

Les équations (3) donnent par la différentiation

$$dU = b\,dx + c\,dy,\quad dU' = b'\,dx + c'\,dy,\quad dU'' = b''\,dx + c''\,dy;$$

à cause des formules (4), on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} U'\,dU'' - U''\,dU' &= \alpha\,(x\,dy - y\,dx) - \beta\,dy + \gamma\,dx, \\ U''\,dU - U\,dU'' &= \alpha'\,(x\,dy - y\,dx) - \beta'\,dy + \gamma'\,dx, \\ U\,dU' - U'\,dU &= \alpha''\,(x\,dy - y\,dx) - \beta''\,dy + \gamma''\,dx, \end{aligned}$$

et celles-ci donnent, en faisant usage des formules (6),

$$(10)\quad \begin{cases} \Delta(x\,dy - y\,dx) = (a'U'' - a''U')\,dU + (a''U - aU'')\,dU' \\ \qquad\qquad + (aU' - a'U)\,dU'', \\ -\Delta\,dy = (b'U'' - b''U')\,dU + (b''U - bU'')\,dU' \\ \qquad\qquad + (bU' - b'U)\,dU'', \\ \Delta\,dx = (c'U'' - c''U')\,dU + (c''U - cU'')\,dU' \\ \qquad\qquad + (cU' - c'U)\,dU''. \end{cases}$$

Nous allons maintenant substituer dans l'équation proposée les valeurs de L, M, N, $x\,dy - y\,dx$, dy et dx tirées des formules (9) et (10). Le résultat de cette substitution sera une équation entre les variables U, U′, U″ et leurs différentielles; l'une de ces variables est exprimable par les deux autres au moyen de la première équation (7), mais il vaut mieux, pour notre objet, les conserver toutes les trois. Les neuf constantes des polynômes U, U′, U″ étant indéterminées, nous les assujettirons à satisfaire à six relations, et, en introduisant trois nouvelles indéterminées λ, λ', λ'', nous poserons les neuf équations

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} a\,\mathcal{A} + b\,\mathcal{B} + c\,\mathcal{C} &= \Delta\lambda,\\ a\,\mathcal{A}' + b\,\mathcal{B}' + c\,\mathcal{C}' &= 0,\\ a\,\mathcal{A}'' + b\,\mathcal{B}'' + c\,\mathcal{C}'' &= 0,\\ a'\,\mathcal{A} + b'\,\mathcal{B} + c'\,\mathcal{C} &= 0,\\ a'\,\mathcal{A}' + b'\,\mathcal{B}' + c'\,\mathcal{C}' &= \Delta\lambda',\\ a'\,\mathcal{A}'' + b'\,\mathcal{B}'' + c'\,\mathcal{C}'' &= 0,\\ a''\,\mathcal{A} + b''\,\mathcal{B} + c''\,\mathcal{C} &= 0,\\ a''\,\mathcal{A}' + b''\,\mathcal{B}' + c''\,\mathcal{C}' &= 0,\\ a''\,\mathcal{A}'' + b''\,\mathcal{B}'' + c''\,\mathcal{C}'' &= \Delta\lambda''. \end{aligned}\right.$$

Alors l'équation proposée deviendra, après la substitution dont nous venons de parler,

$$(\lambda' - \lambda'')\,\mathrm{U}'\mathrm{U}''\,d\mathrm{U} + (\lambda'' - \lambda)\,\mathrm{U}''\mathrm{U}\,d\mathrm{U}' + (\lambda - \lambda')\,\mathrm{U}\mathrm{U}'\,d\mathrm{U}'' = 0$$

ou

$$(12)\quad (\lambda' - \lambda'')\frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{U}} + (\lambda'' - \lambda)\frac{d\mathrm{U}'}{\mathrm{U}'} + (\lambda - \lambda')\frac{d\mathrm{U}''}{\mathrm{U}''} = 0.$$

Dans cette équation, les trois variables sont séparées; en intégrant et en désignant par H une constante arbitraire, on a

$$(13)\quad (\lambda' - \lambda'')\log\mathrm{U} + (\lambda'' - \lambda)\log\mathrm{U}' + (\lambda - \lambda')\log\mathrm{U}'' = \log\mathrm{H},$$

et, si l'on convient de représenter par $U^{\lambda'-\lambda''}$ la quantité dont le logarithme est $(\lambda'-\lambda'')\log U$, même dans le cas où $\lambda'-\lambda''$ et U sont imaginaires, l'intégrale de l'équation proposée sera

$$U^{\lambda'-\lambda''}\,U'^{\lambda''-\lambda}\,U''^{\lambda-\lambda'}=H. \tag{14}$$

Il reste à calculer les coefficients des fonctions U, U', U'', ainsi que les exposants λ, λ', λ''. A cet effet, considérons les trois équations du premier des groupes (11); ajoutons ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par a, a', a'', puis par b, b', b'', puis par c, c', c''; il viendra, à cause des équations (8) et (6),

$$\left\{\begin{aligned}(A-\lambda)a+Bb+Cc&=0,\\ A'a+(B'-\lambda)b+C'c&=0,\\ A''a+B''b+(C''-\lambda)c&=0.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Il est évident qu'en opérant de la même manière sur les équations des deux derniers groupes (11) on obtiendra deux systèmes d'équations qui peuvent se déduire du système (15), en remplaçant a, b, c, λ par a', b', c', λ', puis par a'', b'', c'', λ''.

Les équations (15) sont homogènes par rapport à a, b, c, et, si l'on élimine entre elles ces trois quantités, on obtiendra une équation du troisième degré

$$F(\lambda)=0, \tag{16}$$

dont le premier membre aura pour valeur le déterminant

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B & C\\ A' & B'-\lambda & C'\\ A'' & B'' & C''-\lambda\end{vmatrix};$$

ainsi l'on aura

$$\left\{\begin{aligned}F(\lambda)=(A-\lambda)(B'-\lambda)(C''-\lambda)-B''C'(A-\lambda)\\ -A''C(B'-\lambda)-A'B(C''-\lambda)+A'B''C+A''BC'.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les équations (15) ne peuvent déterminer que les rapports de deux des trois constantes a, b, c à la troisième. Si l'on fait, pour abréger,

$$(18)\qquad \begin{cases} B'C'' - B''C' = D, \\ C'A'' - C''A' = D', \\ A'B'' - A''B' = D'', \\ B' + C'' = E, \end{cases}$$

on aura, par les deux dernières équations (15),

$$\frac{a}{D - E\lambda + \lambda^2} = \frac{b}{D' + A'\lambda} = \frac{c}{D'' + A''\lambda};$$

il est permis de prendre ces rapports égaux à l'unité, et alors on aura

$$(19)\qquad a = D - E\lambda + \lambda^2,\quad b = D' + A'\lambda,\quad c = D'' + A''\lambda.$$

Il est évident que l'équation (16) a pour racines les trois quantités λ, λ', λ'', et si l'on remplace dans les formules (19) λ par λ' et par λ'', ces formules donneront les valeurs de a', b', c' et de a'', b'', c''. On a donc en résumé

$$(20)\qquad \begin{cases} U = (D - E\lambda + \lambda^2) + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y, \\ U' = (D - E\lambda' + \lambda'^2) + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y, \\ U'' = (D - E\lambda'' + \lambda''^2) + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y, \end{cases}$$

en sorte que, pour intégrer l'équation différentielle proposée, il suffit de résoudre l'équation du troisième degré (16).

667. L'intégrale (13) ou (14) que nous avons obtenue devient illusoire lorsque l'équation (16) en λ a des racines égales ; mais il est facile de déduire de notre analyse la solution de ce cas particulier. Si l'on pose

$$\log U = f(\lambda),$$

l'intégrale (13) sera

$$(21)\quad (\lambda'-\lambda'')f(\lambda)+(\lambda''-\lambda)f(\lambda')+(\lambda-\lambda')f(\lambda'')=\text{const.},$$

ou, en faisant $\lambda'=\lambda+h$ et en divisant par h,

$$(\lambda''-\lambda)\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h}+f(\lambda)-f(\lambda'')=\text{const.}$$

Les coefficients A, B, ... de l'équation proposée étant regardés d'abord comme des indéterminées, faisons-les tendre vers certaines valeurs pour lesquelles l'équation correspondante en λ ait deux racines égales. Pour chaque système de valeurs des coefficients, l'équation précédente constitue l'intégrale de la proposée; la même chose subsistera donc à la limite, et l'on aura pour cette intégrale

$$(22)\qquad (\lambda''-\lambda)f'(\lambda)+f(\lambda)-f(\lambda'')=\text{const.}$$

ou

$$(23)\qquad (\lambda''-\lambda)\frac{U_1}{U}+\log U-\log U''=\text{const.},$$

U_1 étant la dérivée de U prise par rapport à λ, savoir

$$(24)\qquad U_1=(2\lambda-E)+A'x+A''y.$$

Si l'on pose $\lambda''=\lambda+h$ dans l'équation (22), il viendra, en divisant par $-\frac{h^2}{1.2}$,

$$\frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)-\frac{h}{1}f'(\lambda)}{\frac{h^2}{1.2}}=\text{const.}$$

Supposons que les coefficients A, B, ... ne soient assujettis qu'à la seule relation nécessaire pour l'égalité de

deux racines égales de l'équation (16), et faisons-les tendre vers des limites déterminées qui répondent à une équation (16) dont les trois racines soient égales ; à la limite l'équation précédente deviendra

$$f''(\lambda) = \text{const.},$$

ou

$$U\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)^2 = HU^2,$$

ou enfin

$$(25)\qquad HU^2 + U_1^2 - 2U = 0.$$

Ainsi, dans le cas où l'équation (16) a ses trois racines égales, l'intégrale de la proposée est une équation du deuxième degré.

Considérons, par exemple, le cas où l'équation (16) a trois racines nulles. On a d'abord

$$U = D + D'x + D''y, \quad U_1 = A + A'x + A''y = L,$$

puis

$$DL + D'M + D''N = 0,$$

$$AL + A'M + A''N = U,$$

ainsi qu'on le reconnaît facilement. Si l'on regarde A, A′, A″, D, D′, D″ comme des quantités données, et que les fonctions M, N soient déterminées par les deux précédentes équations, l'intégrale de l'équation différentielle

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0$$

sera

$$HU^2 - 2U + L^2 = 0,$$

H étant la constante arbitraire.

Cas des équations différentielles $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, *qui ne sont pas résolues par rapport à* $\frac{dy}{dx}$.

668. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des équations différentielles résolues par rapport à la dérivée qui y figure; nous allons examiner ici quelques cas dans lesquels on peut obtenir l'intégrale demandée, bien que l'équation différentielle proposée, savoir

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ne soit pas résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$.

1° D'abord, si l'équation proposée ne renferme ni x ni y, elle est de la forme

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

et elle exprime que

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

α étant une racine de l'équation $F(\alpha) = 0$. L'intégration donne $y = \alpha x + C$, C étant la constante; on tire de là $\alpha = \frac{y - C}{x}$, et l'on a, par suite,

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0$$

pour l'intégrale demandée.

2° Lorsque l'équation proposée ne renferme pas y, l'intégration se ramène aux quadratures en résolvant l'équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Si cette résolution ne peut

pas être exécutée, mais que l'on sache résoudre l'équation par rapport à x, on pourra encore ramener le problème aux quadratures. Posons en effet

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{d'où} \quad dy = p\,dx,$$

et supposons qu'on ait tiré de l'équation proposée

$$x = f(p);$$

on aura aussi, par la différentiation, $dx = f'(p)\,dp$ ou, à cause de $dx = \frac{dy}{p}$,

$$dy = p\,f'(p)\,dp;$$

c'est là une équation différentielle dans laquelle les variables y et p sont séparées; on en tire par l'intégration

$$y = \int_{p_0}^{p} p\,f'(p)\,dp + C,$$

C étant la constante arbitraire. On a ainsi deux équations qui expriment les valeurs de x et de y en fonction de p; lorsqu'il sera possible d'éliminer p entre ces équations, l'intégrale de la proposée sera exprimable par une équation entre x, y et C.

3° Lorsque l'équation proposée ne renferme pas x et qu'on peut la résoudre par rapport à y, on obtient l'intégrale demandée par le procédé que nous venons d'employer. Car si l'on fait, comme précédemment,

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

l'équation proposée prendra la forme

$$y = f(p);$$

et la différentiation donnera

$$dy = f'(p)\,dp,$$

ou

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp;$$

ce qui donne, par l'intégration,

$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{f'(p)}{p}\,dp + C,$$

C étant la constante. Comme dans le cas précédent, l'intégrale demandée est représentée par deux équations entre x, y, C et la variable p, qui doit être éliminée.

669. Le cas que nous venons d'examiner est compris dans celui où l'équation différentielle proposée peut être résolue par rapport à y. Supposons que cette équation soit mise sous la forme

$$(1) \qquad y = f(x, p),$$

p désignant, comme précédemment, la dérivée $\frac{dy}{dx}$. En différentiant l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

ce qui est une équation différentielle du premier ordre entre les variables x et p. Supposons que l'on sache trouver l'intégrale

$$(3) \qquad \Phi(x, p, C) = 0$$

de cette équation (2); il est évident que l'élimination de p entre les équations (1) et (3) donnera une équation

$$(4) \qquad F(x, y, C) = 0$$

entre x, y et la constante C, qui sera l'intégrale générale de l'équation (1).

Des équations différentielles linéaires par rapport aux variables.

670. Les équations différentielles dont il s'agit ici sont de la forme

$$(1) \qquad y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

où l'on fait

$$p = \frac{dy}{dx}$$

et où $\varphi(p)$, $\psi(p)$ désignent des fonctions données de p. Nous appliquerons ici le procédé dont nous avons fait usage au numéro précédent; la différentiation de l'équation (1) donne

$$(2) \qquad p\,dx = dx\,\varphi(p) + [x\,\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp$$

ou

$$(3) \qquad \frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\,x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0.$$

Regardons x comme fonction de la variable indépendante p; l'équation (3) est linéaire, et elle a pour intégrale (n° 658)

$$(4) \qquad x = e^{-\int_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p) - p}} \left[\mathrm{C} - \int_{p_0}^{p} e^{\int_{p_0}^{p} \frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p) - p}} \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}\,dp \right];$$

on obtiendra donc l'intégrale de l'équation (1) en éliminant p entre les équations (1) et (4).

671. Les formules que nous venons d'obtenir sont illusoires lorsque l'on a $\varphi(p) = p$; ce cas mérite d'être

examiné avec attention. L'équation (1) est alors

$$(5) \qquad y = px + \psi(p),$$

et l'équation (2) qu'on en tire par la différentiation se réduit à

$$(6) \qquad [x + \psi'(p)]\, dp = 0.$$

On a donc

$$(7) \qquad dp = 0$$

ou

$$(8) \qquad x + \psi'(p) = 0.$$

Considérons d'abord l'équation (7); elle nous donne par l'intégration

$$p = C,$$

C étant une constante, et, en substituant cette valeur dans l'équation (5), il vient

$$(9) \qquad y = Cx + \psi(C),$$

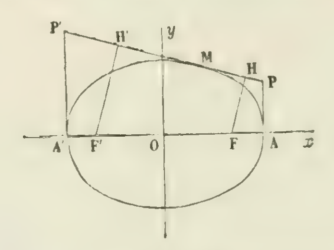
ce qui est l'intégrale générale de la proposée, comme on l'a déjà vu au n° 651.

Considérons en second lieu l'équation (8) : si l'on en tire la valeur de p pour la substituer dans l'équation (5), on aura une solution de cette équation différentielle qui n'est autre chose que la solution particulière dont nous connaissons l'existence. Ce résultat s'accorde avec la théorie des solutions particulières que nous avons développée dans le Chapitre précédent; effectivement l'équation (8) n'est autre chose que la dérivée de l'équation (5) prise par rapport à $\frac{dy}{dx}$; l'élimination de p doit donc donner la solution particulière. On voit aussi que le calcul nécessaire pour cette élimination est identique à celui

qu'exige l'élimination de C entre l'intégrale générale (9) et sa dérivée relative à C.

Application à quelques exemples.

672. Problème I. — *Étant donnés deux points* F *et* F′ *dont la distance est* $2c$, *trouver une courbe telle que le produit des distances de ces points à chaque tangente soit égal à une quantité donnée* b^2.



Prenons la droite FF′ pour axe des x et la perpendiculaire menée à cette ligne par son milieu O pour axe des y; en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, l'équation de la tangente au point (x, y) de la courbe demandée sera

$$Y - y = p(X - x).$$

Les distances FH, F′H′ de cette tangente aux points F et F′ ont pour valeurs

$$FH = \frac{y - px + pc}{\sqrt{1+p^2}}, \quad F'H' = \frac{y - px - pc}{\sqrt{1+p^2}};$$

l'équation du problème sera donc

$$\frac{(y - px)^2 - p^2c^2}{1 + p^2} = \pm b^2,$$

ou, en faisant $a^2 = c^2 \pm b^2$,

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

L'intégrale générale de cette équation sera (n° 671), en désignant par C la constante,

$$y = Cx + \sqrt{a^2C^2 \pm b^2};$$

elle représente des lignes droites; mais la véritable réponse au problème proposé est donnée par la solution particulière de l'équation différentielle, pour laquelle on a

$$x + \frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}} = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}};$$

en portant cette valeur de x dans l'équation précédente, on a

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^3}};$$

et l'élimination de C donne ensuite

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

équation qui représente une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les points F et F'.

673. Problème II. — *Étant données deux parallèles et sur chacune d'elles un point fixe, on demande de trouver la courbe dont les tangentes interceptent sur les parallèles données et, à partir des points donnés, des segments dont le produit soit égal à une quantite donnée.*

Soient AP, A'P' les parallèles données, A et A' les points donnés sur ces droites (*voir* la figure du n° 672); prenons pour axe des x la ligne AA' et pour axe des y une parallèle aux droites AP, A'P' menée par le milieu O de AA'. La tangente de la courbe cherchée a pour équation

$$Y - y = p(X - x),$$

et, si l'on désigne par $2a$ la distance AA′, les longueurs AP, A′P′ comprises entre les points A, A′ et la tangente ont pour valeurs

$$\pm AP = y - px - pa, \quad \pm A'P' = y - px + pa;$$

l'équation du problème sera donc

$$(y - px)^2 - a^2p^2 = \pm b^2$$

ou

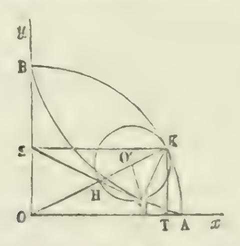
$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

On voit qu'elle est la même que celle du problème précédent. La véritable solution est encore donnée ici par la solution particulière

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui représente une ellipse ou une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.

674. Problème III. — *Trouver la courbe telle que la partie de ses tangentes interceptée entre deux droites rectangulaires soit égale à une quantité donnée a.*



Soient T et S les points où la tangente de la courbe demandée rencontre les droites données; celles-ci étant prises pour axes, l'équation de la tangente sera

$$Y - y = p(X - x),$$

et l'on aura

$$\pm \mathrm{OS} = y - px, \quad \pm \mathrm{OT} = -\frac{y - px}{p};$$

l'équation du problème sera donc

$$(y - px)^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = a^2,$$

ou

(1) $$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Comme dans les deux problèmes précédents, l'intégrale générale s'obtiendra en remplaçant p par une constante, et la solution particulière qui représente la courbe demandée s'obtiendra en éliminant p entre l'équation différentielle et sa dérivée relative à p, savoir

(2) $$0 = x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des équations (1) et (2) on tire

$$x = -\frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

élevant ces équations à la puissance $\frac{2}{3}$ et ajoutant ensuite, on obtient l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

qui représente une épicycloïde engendrée par un cercle de rayon égal à $\frac{a}{4}$ roulant dans l'intérieur d'un cercle de rayon a.

Ce résultat peut être établi très simplement par des considérations géométriques. En effet, construisons sur

OS et OT le rectangle OSKT; joignons OK, qui rencontre ST en H, et décrivons le cercle AKB du point O comme centre avec le rayon $OK = a$; décrivons enfin le cercle O′ sur HK comme diamètre, et soit M le point où la circonférence de ce cercle rencontre de nouveau la droite ST. L'angle KHT est double de KOA et il est moitié de KO′M; ce dernier angle est donc quadruple de KOA; d'ailleurs le rayon O′K est le quart du rayon OK; donc les deux arcs de cercle KM et KA sont égaux entre eux. Il résulte de là que le lieu du point M est une épicycloïde dont l'origine est en A; nous savons que MH ou ST est tangente à cette épicycloïde, qui est ainsi l'enveloppe de la droite mobile ST.

Du problème des trajectoires.

675. Le problème dont il s'agit ici est le suivant:

Étant donnée une famille de courbes représentées par une équation qui renferme un paramètre variable, trouver les lignes qui coupent les courbes données sous un angle donné.

Lorsque l'angle donné est droit, les courbes demandées sont dites les *trajectoires orthogonales* des courbes données.

Le problème des trajectoires conduit toujours à une équation différentielle du premier ordre. Supposons que les courbes données soient rapportées à deux axes rectangulaires, et représentons par

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

leur équation, α étant un paramètre variable. Soit $M(x, y)$ l'un des points d'intersection de l'une des courbes (1) avec l'une des trajectoires demandées, et désignons par c, c_1

les coefficients d'inclinaison des tangentes en M aux deux courbes, par V la tangente de l'angle donné des mêmes courbes : on aura

$$\frac{c_1 - c}{1 + cc_1} = V;$$

le coefficient c est la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (1); par conséquent, on a

$$c = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

ensuite, c_1 étant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ relative à la courbe demandée, on a

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx}} = V$$

ou

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y} + V\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} - V\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0,$$

et, si l'on élimine α entre les équations (1) et (2), on obtiendra une équation résultante

$$(3) \qquad \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qui sera l'équation différentielle des trajectoires demandées.

Dans le cas des trajectoires orthogonales, on a $V = \infty$, et l'équation (2) se réduit à

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0;$$

l'élimination de α entre les équations (1) et (4) sera l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

676. Exemple I. — *Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant et donné les courbes représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation* $y = \alpha x^m$.

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette équation est $m\alpha x^{m-1}$ ou $m\frac{y}{x}$; si donc on désigne par $\frac{1}{k}$ la tangente de l'angle donné, l'équation différentielle des trajectoires demandées sera

$$\frac{\frac{dy}{dx} - m\frac{y}{x}}{1 + m\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m\frac{y}{x} + \frac{1}{k}}{1 - \frac{m}{k}\frac{y}{x}}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction de $\frac{y}{x}$; on pourra donc intégrer par la méthode du n° 654.

Examinons le cas de $m = 1$: les courbes données se réduisent à un système de droites passant par l'origine; l'équation différentielle est alors

$$x\,dx + y\,dy = k(x\,dy - y\,dx).$$

On reconnaît immédiatement que $x\,dy - y\,dx$ est la différentielle du double du secteur formé par le rayon vecteur du point (x, y) avec un rayon fixe, et dans le système des coordonnées polaires cette même différentielle est exprimée par $\rho^2 d\omega$. Pareillement $x\,dx + y\,dy$ est la demi-différentielle $\rho\,d\rho$ du carré ρ^2; on a donc

$$\rho\,d\rho = k\rho^2 d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} = k\,d\omega,$$

et l'intégration donne

$$\rho = Ce^{k\omega},$$

C étant la constante arbitraire. On voit que les trajectoires demandées sont des spirales logarithmiques, ce qui s'accorde avec la propriété connue de ces courbes (n° 247).

677. Exemple II. — *Trouver les trajectoires orthogonales d'un système d'ellipses homofocales.*

L'équation des ellipses données est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = 1,$$

ρ désignant le paramètre variable et b une quantité donnée. La différentiation donne

$$\frac{x\,dx}{\rho^2} = \frac{y\,dy}{b^2 - \rho^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

et l'on tire de là

$$\frac{x^2}{\rho^2} = \frac{x}{dx}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2}, \qquad \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = -\frac{y}{dy}\,\frac{x\,dx + y\,dy}{b^2},$$

puis, en ajoutant,

$$\frac{(x\,dy - y\,dx)(x\,dx + y\,dy)}{b^2\,dx\,dy} = 1.$$

Cette équation appartient aux ellipses données. Pour en conclure celle des trajectoires orthogonales, il faut remplacer $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$ ou dy par $-dx$ et dx par dy; or l'équation reste la même après un tel changement: donc son intégrale reste aussi la même, et par conséquent l'équation des ellipses données représente en même temps les trajectoires demandées. Seulement, pour distinguer

les deux systèmes, il faut remplacer ρ^2 par un autre paramètre μ^2 et écrire

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} = 1.$$

Si l'on suppose $\mu^2 < b^2$, cette équation représentera des hyperboles qui ont mêmes foyers que les ellipses données et qui coupent celles-ci à angle droit.

678. Exemple III. — *Trouver les trajectoires orthogonales des hyperboles équilatères dont le centre est en un point donné et qui passent par un second point donné.*

Dans le système des coordonnées polaires, les hyperboles données ont pour équation

$$\rho^2 = \frac{a^2 \cos 2\alpha}{\cos(2\omega - 2\alpha)} \quad \text{ou} \quad \cot(2\omega - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\omega}{\rho^2 - a^2 \cos 2\omega},$$

α étant le paramètre variable et a désignant la distance du point donné au centre commun. La différentiation logarithmique donne

$$\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \operatorname{tang}(2\omega - 2\alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{\rho^2 - a^2 \cos 2\omega}{a^2 \sin 2\omega}.$$

Or $\frac{d\rho}{\rho\, d\omega}$ est la tangente de l'angle formé par la normale de la courbe avec le rayon vecteur; on obtiendra donc l'équation différentielle des courbes cherchées en prenant pour $\frac{d\rho}{\rho\, d\omega}$ l'inverse changé de signe de la précédente expression; on a ainsi

$$\frac{d\rho}{\rho\, d\omega} = \frac{a^2 \sin 2\omega}{a^2 \cos 2\omega - \rho^2}$$

ou

$$\frac{d(a^2 \cos 2\omega)}{d\rho} = -\frac{2}{\rho}(a^2 \cos 2\omega) + 2\rho.$$

Cette équation est linéaire quand on prend pour variables $a^2\cos 2\omega$ et ρ; en désignant par $a^4 - b^4$ la constante arbitraire, on trouve l'intégrale

$$a^2\cos 2\omega = \frac{1}{2\rho^2}[\rho^4 + a^4 - b^4]$$

ou

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\omega + a^4 = b^4;$$

cette équation, dans laquelle b est le paramètre variable, représente un système d'ovales de Cassini (n° 565) ayant les mêmes *foyers*.

Des facteurs propres à rendre différentielle exacte une expression de la forme $P\,dx + Q\,dy$.

679. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

résolue par rapport à la dérivée $\frac{dy}{dx}$; on peut poser d'une infinité de manières différentes

$$F(x, y) = -\frac{P}{Q},$$

P et Q étant des fonctions de x et y; alors l'équation proposée prendra la forme

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Si les fonctions P et Q ont été choisies de manière que $P\,dx + Q\,dy$ soit une différentielle exacte quand on regarde x et y comme des variables indépendantes, et que l'on ait

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$

u étant une fonction de x et de y, il est évident que l'in-

tégrale de l'équation différentielle proposée sera

$$u = \text{const.}$$

Si, après avoir choisi les fonctions représentées par P et Q, on veut en prendre d'autres, celles-ci seront respectivement égales aux premières multipliées par un même facteur v, et l'équation différentielle proposée aura la forme

$$v\mathrm{P}\,dx + v\mathrm{Q}\,dy = 0.$$

Alors, si le premier membre est la différentielle exacte d'une fonction u des variables x et y, l'intégrale de l'équation proposée sera, comme on vient de le dire,

$$u = \text{const.}$$

Les fonctions P et Q ayant été choisies à volonté, il existe toujours un facteur v qui réalise l'hypothèse dans laquelle nous venons de nous placer ; c'est ce que nous nous proposons d'établir ici.

680. Théorème I. — *Soient* P *et* Q *deux fonctions données de deux variables indépendantes x, y ; il existe toujours un facteur v tel, qu'on obtient une différentielle exacte en multipliant par ce facteur l'expression* $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$.

En effet, considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = 0 ;$$

nous savons que cette équation admet une intégrale, et si l'on suppose cette intégrale résolue par rapport à la constante arbitraire qu'elle renferme, elle aura la forme

$$(2) \qquad u = \mathrm{C},$$

u étant une fonction des variables x et y. L'équation (2)

donne, par la différentiation,

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

et il faut que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de l'équation (3) soit précisément égale à celle que fournit l'équation différentielle (1); on a donc

$$(4) \qquad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\mathrm{P}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\mathrm{Q}}.$$

Cette équation (4) a lieu en vertu de l'équation (2), mais j'ajoute qu'elle est identique; car elle est indépendante de C, et la valeur de y donnée par l'équation (2) est une fonction de x et de C.

Si l'on désigne par v la valeur commune des deux membres de l'équation (4), on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v\mathrm{P}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v\mathrm{Q},$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad v(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

L'expression $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ devient donc une différentielle exacte, lorsqu'elle a été multipliée par le facteur v.

681. Théorème II. — *Il existe une infinité de facteurs propres à rendre l'expression* $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ *une différentielle exacte.*

En effet, nous venons de prouver qu'il existe un tel facteur, et en le désignant par v nous avons

$$v(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy) = du,$$

u étant une fonction de x et de y. Si l'on multiplie cette

équation par une fonction quelconque $\varphi(u)$ de u, il viendra

$$v\varphi(u)(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy) = \varphi(u)\,du,$$

ce qui est encore une différentielle exacte.

Ainsi, quelle que soit la fonction $\varphi(u)$, l'expression $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ devient une différentielle exacte quand on la multiplie par le facteur $v\varphi(u)$.

J'ajoute que $v\varphi(u)$ est l'expression générale des facteurs qui possèdent cette propriété. En effet, soit V l'un de ces facteurs, et supposons que l'on ait

$$\mathrm{V}(\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy) = d\mathrm{U},$$

U étant une fonction de x et de y, on aura

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \frac{d\mathrm{U}}{\mathrm{V}} = \frac{du}{v},$$

d'où

$$d\mathrm{U} = \frac{\mathrm{V}}{v}\,du.$$

Or, puisque u est fonction de x et de y, on peut regarder y comme fonction de x et de u; alors U devient une fonction de u et de x, et la formule précédente montre que la dérivée partielle de U relative à x est nulle. Il s'ensuit que U est une fonction de u; il en est de même de sa dérivée $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}$, et l'on peut écrire

$$\frac{\mathrm{V}}{v} = \varphi(u) \quad \text{ou} \quad \mathrm{V} = v\varphi(u),$$

ce qu'il fallait démontrer.

682. Théorème III. — *Si V et v désignent deux facteurs propres à rendre l'expression $\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ une*

différentielle exacte, et que le rapport de ces facteurs ne se réduise pas à une constante, l'intégrale générale de l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$ *sera* $\frac{V}{v} = C$, *C étant une constante arbitraire.*

En effet, par hypothèse, on a

$$v(P\,dx + Q\,dy) = du,$$

et, puisque le produit $V(P\,dx + Q\,dy)$ est aussi différentielle exacte, on a, par le théorème précédent,

$$\frac{V}{v} = \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ désignant une certaine fonction de u.

Cela posé, l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$du = 0;$$

son intégrale est donc $u =$ const., ou, ce qui revient au même,

$$\varphi(u) = \text{const},$$

ou

$$\frac{V}{v} = C,$$

C étant une constante arbitraire.

On trouvera plus loin des applications importantes de ce théorème.

683. Le facteur v qui rend $P\,dx + Q\,dy$ une différentielle exacte ne donne pas seulement l'intégrale générale de l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$, mais il

fournit aussi immédiatement la solution particulière, quand elle existe.

En effet, l'équation différentielle peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{v}\,du = 0,$$

et, par conséquent, elle se décompose en deux autres

$$du = 0, \quad \frac{1}{v} = 0;$$

la première, $du = 0$, donne l'intégrale générale; la seconde contient les solutions particulières.

On peut déduire ce résultat de notre théorie des solutions particulières. Effectivement, l'intégrale générale étant ici

$$u - C = 0,$$

il faut égaler à zéro, pour avoir les solutions particulières, le rapport des dérivées partielles de $u - C$ relatives à C et à y ou à C et à x; la première de ces dérivées se réduit ici à -1, et l'on a

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} = 0, \quad \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0;$$

à cause de

$$du = v(P\,dx + Q\,dy),$$

ces équations donnent

$$\frac{1}{v} = 0.$$

Recherche du facteur propre à rendre $P\,dx + Q\,dy$ une différentielle exacte.

684. La condition pour que l'expression

$$(1) \qquad vP\,dx + vQ\,dy$$

soit une différentielle exacte est (n° 483)

$$\frac{\partial(vP)}{\partial y} = \frac{\partial(vQ)}{\partial x}$$

ou

(2) $$P\frac{\partial v}{\partial y} - Q\frac{\partial v}{\partial x} = v\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Cette équation, de laquelle dépend la fonction inconnue v, est une équation aux dérivées partielles; la recherche de v constitue donc un problème d'un ordre plus élevé que celui qui a pour objet l'intégration de l'équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0;$$

il y a cependant des cas dans lesquels le facteur v peut être obtenu facilement; nous indiquerons ici les plus simples.

685. Cas ou P et Q sont des fonctions homogènes du même degré. — Si P et Q sont des fonctions homogènes du degré m, on peut trouver une fonction homogène v d'un certain degré n, telle que

(1) $$vP\,dx + vQ\,dy$$

soit une différentielle exacte.

En effet, soit v une fonction homogène du degré n, vP sera une fonction homogène du degré $m+n$, et l'on aura identiquement (nos 84 et 136)

$$x\frac{\partial(vP)}{\partial x} + y\frac{\partial(vP)}{\partial y} = (m+n)vP.$$

La condition pour que l'expression (1) soit différentielle exacte, savoir :

(2) $$\frac{\partial(vQ)}{\partial x} = \frac{\partial(vP)}{\partial y},$$

peut donc être écrite comme il suit :

$$x\frac{\partial(v\mathrm{P})}{\partial x}+y\frac{\partial(v\mathrm{Q})}{\partial x}=(m+n)v\mathrm{P},$$

ou, à cause de $y\frac{\partial(v\mathrm{Q})}{\partial x}=\frac{\partial(v\mathrm{Q}y)}{\partial x}$ et $x\frac{\partial(v\mathrm{P})}{\partial x}=\frac{\partial(v\mathrm{P}x)}{\partial x}-v\mathrm{P}$, de la manière suivante :

$$\frac{\partial[v(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y)]}{\partial x}=(m+n+1)v\mathrm{P}.$$

Le nombre n étant indéterminé, posons

$$m+n+1=0;$$

alors la condition (2) équivaudra à celle-ci

$$(3)\qquad \frac{\partial[v(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y)]}{\partial x}=0;$$

un raisonnement semblable prouverait que la condition (2) peut être mise sous la forme

$$(4)\qquad \frac{\partial[v(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y)]}{\partial y}=0.$$

Les formules (3) et (4) expriment que $v(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y)$ est une constante, et, en prenant cette constante égale à 1, on a

$$(5)\qquad v=\frac{1}{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y}.$$

Il suit de là que, si P et Q sont des fonctions homogènes du même degré, l'expression

$$\frac{\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy}{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y}$$

sera une différentielle exacte.

Donc, s'il s'agit d'intégrer l'équation différentielle

(6) $$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

il suffira de chercher, d'après la méthode du n° 483, l'intégrale de la différentielle $\dfrac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy}$, et l'on égalera ensuite cette intégrale à une constante arbitraire.

Si le premier membre de l'équation (6) est une différentielle exacte, nous connaissons deux facteurs, savoir : $\dfrac{1}{Px + Qy}$ et 1, propres à rendre $P\,dx + Q\,dy$ différentielle exacte ; si donc on égale à une constante C le quotient de ces deux facteurs, on obtiendra (n° 682) l'intégrale générale de l'équation (6), laquelle sera

$$Px + Qy = C.$$

Il faut remarquer que la méthode précédente ne diffère pas au fond de celle que nous avons employée au n° 654; car soit

$$\frac{P}{Q} = -f\left(\frac{y}{x}\right),$$

le premier membre de l'équation (6) se réduira à

$$Q\left[dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx\right],$$

ou, en posant $y = xz$, $dy = x\,dz + z\,dx$, à

$$Qx[z - f(z)]\left[\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)}\right].$$

C'est par cette transformation que nous avons effectué la séparation des variables au n° 654, et l'on voit que l'expression précédente devient une différentielle exacte, si on la muliplie par le facteur

$$\frac{1}{Qx[z - f(z)]} = \frac{1}{Px + Qy}.$$

686. On peut encore déterminer facilement le facteur ν, propre à rendre

$$P\,dx + Q\,dy$$

une différentielle exacte, lorsque ce facteur ne dépend que d'une seule variable x ou y. Supposons, par exemple, que ν ne dépende que de x, alors on aura $\frac{\partial \nu}{\partial y} = 0$, et l'équation (2) du n° 685 deviendra

$$\frac{\frac{d\nu}{dx}}{\nu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Notre hypothèse exige donc que l'on ait

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = X,$$

X étant une fonction de x. Si cela a lieu, on aura

$$\frac{d\nu}{\nu} = X\,dx,$$

d'où

$$\log \nu = \int_{x_0}^{x_1} X\,dx + \text{const.},$$

et l'on pourra prendre

$$\nu = e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}.$$

Supposons, comme cela est permis, $Q = 1$; dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial P}{\partial y}$ est indépendante de y, et l'on a

$$P = Xy + X_1,$$

X et X_1 étant des fonctions de x; par conséquent, l'ex-

pression proposée a la forme

$$dy + (Xy + X_1)dx,$$

et le facteur qui la rend intégrable est $e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx}$. D'après cela, pour intégrer l'équation linéaire

$$dy + (Xy + X_1)dx = 0,$$

dont nous nous sommes déjà occupé au n° 658, il suffit de la multiplier par le facteur que nous venons de trouver ; elle devient ainsi

$$dy\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} + y\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} X\,dx + e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} X_1\,dx = 0,$$

d'où, par l'intégration,

$$y\,e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} X\,dx} X_1\,dx = C,$$

C étant la constante arbitraire.

687. Examinons enfin le cas où l'expression $P\,dx + Q\,dy$ devient une différentielle exacte, quand on la multiplie par un facteur v de la forme XY, X et Y étant respectivement des fonctions de x et de y. L'équation de condition est ici

$$\frac{\partial(XYP)}{\partial y} = \frac{\partial(XYQ)}{\partial x},$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\,\frac{\frac{\partial X}{\partial x}}{X} - P\,\frac{\frac{\partial Y}{\partial y}}{Y},$$

ce qui exige que la différence $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ soit de la forme

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{dx} = Q\varphi(x) - P\psi(y).$$

Lorsque cette condition est remplie, on peut faire

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} = \varphi(x), \quad \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = \psi(y),$$

d'où

$$X = e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}, \quad Y = e^{\int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy}, \quad v = XY.$$

Application du Calcul intégral à la démonstration des propriétés fondamentales des transcendantes simples à différentielles algébriques.

688. Le Calcul intégral conduit très-aisément aux propriétés caractéristiques des logarithmes et des fonctions circulaires inverses. Si la théorie de ces transcendantes n'avait pas été préalablement constituée, on en aurait certainement posé les bases dès les premiers pas que l'on eût faits dans la théorie des équations différentielles, comme cela est arrivé effectivement à l'égard des fonctions elliptiques et des transcendantes à différentielles algébriques plus composées Je me propose d'entrer ici dans quelques développements à ce sujet.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0;$$

les variables sont séparées, mais l'intégration de chaque terme exige la notion des logarithmes. Si cette notion n'est pas acquise, l'intégrale devra être représentée par

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C.$$

Si l'on veut que la valeur de y se réduise à une quantité donnée z pour $x = 1$, il faudra déterminer la con-

stante par la condition

$$\int_1^z \frac{dy}{y} = C \quad \text{ou} \quad \int_1^z \frac{dz}{z} = C,$$

en écrivant z au lieu de y sous le signe $\int$; alors notre intégrale sera

$$(2) \qquad \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

D'un autre côté, il est évident que l'équation (1) admet une intégrale algébrique; car si l'on chasse les dénominateurs elle devient

$$y\,dx + x\,dy = 0 \quad \text{ou} \quad d(xy) = 0;$$

l'intégrale est donc

$$xy = \text{const.},$$

et, si l'on détermine la constante de manière que l'on ait $y = z$ pour $x = 1$, on aura

$$(3) \qquad xy = z.$$

On voit que les équations (2) et (3) expriment la même relation entre les quantités x, y, z; en d'autres termes, elles sont équivalentes.

Puisque la transcendante $\int_1^x \frac{dx}{x}$ nous apparaît pour la première fois, il faut lui donner un nom; je choisis celui de *logarithme*, et je pose

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x;$$

alors la formule (2) nous donne, en mettant xy au lieu de z,

$$\log xy = \log x + \log y,$$

ce qui est la propriété fondamentale des logarithmes.

Au lieu des logarithmes nous pouvons introduire les fonctions inverses. Soient

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad \int_1^y \frac{dy}{y} = v, \quad \int_1^z \frac{dz}{z} = w;$$

u étant une fonction de x, on peut regarder x comme fonction de u; désignons cette fonction par le symbole e^u, on aura

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad z = e^w;$$

et les équations (2) et (3) deviendront

$$u + v = w, \quad e^u . e^v = e^w,$$

d'où

$$e^{u+v} = e^u . e^v,$$

ce qui exprime la propriété fondamentale de la fonction exponentielle.

689. Considérons, en deuxième lieu, l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0;$$

les variables sont séparées, et, si l'on désigne par z la valeur que l'on attribue à y lorsque $x = 0$, l'intégrale pourra être représentée par

$$(5) \qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

D'un autre côté, l'équation (4) peut être écrite comme il suit :

$$[(1-xy) + y(x+y)]\,dx + [(1-xy) + x(x+y)]\,dy = 0,$$

ou

$$(1-xy)\,d(x+y) - (x+y)\,d(1-xy) = 0.$$

ou enfin

$$\frac{(1-xy)\,d(x+y)-(x+y)\,d(1-xy)}{(1-xy)^2}=0;$$

le premier membre est la différentielle de $\frac{x+y}{1-xy}$, quantité qui se réduit à z pour $x=0$, $y=z$; donc l'intégrale de l'équation (4), représentée déjà par l'équation (5), peut l'être aussi par l'équation

$$(6) \qquad \frac{x+y}{1-xy}=z.$$

Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=u, \quad \int_0^y \frac{dy}{1+y^2}=v, \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}=w;$$

u étant une fonction de x, on peut regarder x comme fonction de u; désignons cette fonction par le symbole $\operatorname{tang} u$; on aura

$$x=\operatorname{tang} u, \quad y=\operatorname{tang} v, \quad z=\operatorname{tang} w;$$

puis les équations (5) et (6) donneront

$$u+v=w, \quad \frac{\operatorname{tang} u+\operatorname{tang} v}{1-\operatorname{tang} u \operatorname{tang} v}=\operatorname{tang} w,$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}(u+v)=\frac{\operatorname{tang} u \operatorname{tang} v}{1-\operatorname{tang} u \operatorname{tang} v},$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction $\operatorname{tang} u$.

690. Considérons l'équation

$$(7) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

L'intégrale, prise de manière que y se réduise à z pour

$x=0$, sera évidemment

$$(8)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

mais, si l'on multiplie l'équation (7) par le facteur

$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy$, elle deviendra

$$\left[\sqrt{1-y^2}\,dx-x\,\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\right]+\left[\sqrt{1-x^2}\,dy-y\,\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]=0$$

ou

$$d\left(x\sqrt{1-y^2}\right)+d\left(y\sqrt{1-x^2}\right)=0;$$

l'intégrale de l'équation (7), prise de manière que l'on ait $y=z$ pour $x=0$, peut donc se mettre sous la forme

$$(9)\qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=z.$$

En outre, le premier membre de l'équation (7), qui est une différentielle exacte, demeure une différentielle exacte quand on le multiplie par le facteur

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy;$$

il suffit donc (n° 682) d'égaler ce facteur à une constante pour avoir l'intégrale de l'équation (7). Si l'on détermine cette constante par la condition que l'on ait $y=z$ pour $x=0$, on aura

$$(10)\qquad \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy=\sqrt{1-z^2},$$

en sorte que chacune des trois équations (8), (9), (10) exprime la même relation entre les quantités x, y, z; les deux dernières sont algébriques, tandis que la première renferme des transcendantes.

Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = w.$$

u étant fonction de x, nous pouvons regarder x et $\sqrt{1-x^2}$ comme des fonctions de u; représentons ces fonctions par les symboles $\sin u$, $\cos u$; on aura

$$\begin{array}{lll} x = \sin u, & y = \sin v, & z = \sin w, \\ \sqrt{1-x^2} = \cos u, & \sqrt{1-y^2} = \cos v, & \sqrt{1-z^2} = \cos w; \end{array}$$

l'équation (8) deviendra

$$u + v = w,$$

et les équations (9) et (10) donneront

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

formules qui expriment la propriété fondamentale des fonctions *sinus* et *cosinus*. On pourrait retrouver aisément, par cette voie, les autres propriétés connues, celle de la périodicité, par exemple; mais il n'est pas utile de nous arrêter davantage sur ce sujet, et nous allons appliquer, d'après Euler, les considérations dont nous venons de faire usage à la démonstration de la propriété caractéristique des fonctions elliptiques.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques.

691. Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = 0,$$

où k^2 désigne une constante donnée comprise entre

o et 1. Les variables étant séparées, si l'on prend l'intégrale de l'équation (1) de manière que y se réduise à z pour $x = 0$, on aura

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} \\ &\quad = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}, \end{aligned} \right.$$

formule où chaque terme est une intégrale elliptique de première espèce.

Euler a reconnu que l'équation (1) admet une intégrale algébrique, et il est facile de trouver cette intégrale en opérant comme il suit.

Posons

$$X = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

$$Y = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

l'équation proposée sera

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs et en multipliant, en outre, par une fonction indéterminée T de x et de y,

$$(3)\qquad T\sqrt{Y}\,dx + T\sqrt{X}\,dy = 0.$$

Or on a

$$T\sqrt{Y}\,dx = d(T\sqrt{Y}\times x) - \frac{Tx\,dY}{2\sqrt{Y}} - x\sqrt{Y}\,dT,$$

$$T\sqrt{X}\,dy = d(T\sqrt{X}\times y) - \frac{Ty\,dX}{2\sqrt{X}} - y\sqrt{X}\,dT,$$

et l'équation (3) peut ainsi être mise sous la forme

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & d[\mathrm{T}(x\sqrt{\mathrm{Y}}+y\sqrt{\mathrm{X}})]-\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\frac{x\mathrm{Y}'dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}+\frac{y\mathrm{X}'dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right) \\ & \qquad\qquad -(x\sqrt{\mathrm{Y}}+y\sqrt{\mathrm{X}})\,d\mathrm{T}=0, \end{aligned} \right.$$

X' et Y' désignant les dérivées $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{Y}}{dy}$.

Cela posé, on peut disposer de la fonction indéterminée T de manière que l'équation (4) se réduise simplement à

$$(5)\qquad d[\mathrm{T}(x\sqrt{\mathrm{Y}}+y\sqrt{\mathrm{X}})]=0.$$

Pour cela, il faut et il suffit que les autres termes de l'équation (4) se détruisent en vertu de l'équation (1). Remplaçons donc $d\mathrm{T}$ par

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\,dy$$

et remarquons que dx et dy sont proportionnels à $\sqrt{\mathrm{X}}$ et $-\sqrt{\mathrm{Y}}$, d'après l'équation (1); la condition à laquelle T doit satisfaire sera

$$(6)\quad \frac{\mathrm{T}}{2}(x\mathrm{Y}'-y\mathrm{X}')-(y\sqrt{\mathrm{X}}+x\sqrt{\mathrm{Y}})\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\sqrt{\mathrm{X}}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\sqrt{\mathrm{Y}}\right)=0.$$

Cette équation est aux dérivées partielles; mais il suffit pour notre objet d'en connaître une solution quelconque. Or, il est naturel de chercher s'il n'existerait pas une valeur de T rationnelle; il est évident que, si cette valeur existe, elle doit être telle que les dérivées partielles $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}$ soient proportionnelles à y et x, afin que les radicaux disparaissent de l'équation (6). On remplira cette condition en prenant pour T une fonction du pro-

duit xy, car, en désignant par T' la dérivée de T par rapport au produit dont il s'agit, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T'x.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (6) donne

$$\frac{T'}{T} = \frac{xY' - yX'}{2(y^2X - x^2Y)},$$

ou, en mettant au lieu de X, Y, X', Y' leurs valeurs,

$$(7) \qquad \frac{T'}{T} = \frac{2k^2xy}{1 - k^2x^2y^2};$$

cette expression de $\frac{T'}{T}$ est bien une fonction rationnelle du produit xy, et cette fonction est la dérivée de $-\log(1-k^2x^2y^2)$; l'intégrale de l'équation (7) est donc

$$\log T = -\log(1 - k^2x^2y^2) + \text{const.}$$

Mais on peut supposer la constante nulle et l'on aura

$$(8) \qquad T = \frac{1}{1 - k^2x^2y^2};$$

cette valeur de T satisfait à l'équation (6), et par conséquent l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(9) \qquad d\,\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - k^2x^2y^2} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - k^2x^2y^2} = \text{const.}$$

Si l'on remet au lieu de X et de Y leurs valeurs, puis

que l'on détermine la constante de manière que l'on ait en même temps $x=0$, $y=z$, on aura

$$(10)\qquad \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}+y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}=z.$$

Au moyen de cette équation, on peut exprimer en fonction de x et de y les deux radicaux $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-k^2z^2}$, qui représentent les valeurs de $\sqrt{1-y^2}$ et de $\sqrt{1-k^2y^2}$ correspondant à $x=0$; on trouve facilement

$$(11)\qquad \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2}=\sqrt{1-z^2},$$

$$(12)\qquad \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-k^2y^2}-k^2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-k^2x^2y^2}=\sqrt{1-k^2z^2}.$$

692. Chacune des équations (2), (10, (11), (12) représente l'intégrale de l'équation (1) prise de telle manière que l'on ait $y=z$ pour $x=0$. Si l'on pose

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}=u,$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}=v,$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}=w,$$

et que l'on fasse, comme au n° 438,

$$x=\sin\operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1-x^2}=\cos\operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\operatorname{am} u,$$

l'équation (2) deviendra

$$w = u + v,$$

et les équations (10), (11), (12) donneront ensuite

$$(13)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u+v) = \dfrac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,v + \sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}, \\[2ex] \cos\mathrm{am}(u+v) = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v - \sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}, \\[2ex] \Delta\mathrm{am}(u+v) = \dfrac{\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v - k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v}. \end{cases}$$

Ces formules expriment la propriété fondamentale des fonctions elliptiques $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\mathrm{am}\,u$. Nous devons nous borner ici au résultat que nous venons d'établir et dont nous ne saurions développer les conséquences sans sortir des limites que nous nous sommes fixées.

CHAPITRE VIII.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

De l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, *où* X *désigne une fonction donnée de* x.

693. Tous les cas des équations différentielles ordinaires se ramènent, comme on l'a vu, quel que soit le nombre des variables, au cas d'une équation différentielle d'un certain ordre à deux variables. Après avoir exposé les résultats connus de la théorie des équations du premier ordre, nous devons considérer les équations des ordres supérieurs. Mais, si l'on excepte les équations *linéaires*, qui seront pour nous, plus loin, l'objet d'une étude spéciale, la théorie qui nous occupe ne possède aucun principe général, aucune méthode d'intégration, et les développements qui vont suivre sont nécessairement bornés à un très-petit nombre de cas particuliers.

Nous nous arrêterons d'abord un instant sur le cas le plus simple, celui où l'on donne une dérivée d'un certain ordre de la fonction inconnue; il est évident que l'intégration à exécuter ne dépend que des quadratures.

Soit donc l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

et supposons qu'on veuille déterminer son intégrale

générale; désignons par $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ les valeurs que doivent prendre, pour $x = x_0$, la fonction y et ses $n-1$ premières dérivées. En multipliant l'équation (1) par dx et en intégrant ensuite, on a

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} X\,dx + y_0^{(n-1)} = X_1 + y_0^{(n-1)};$$

intégrant de même cette équation après l'avoir multipliée par dx, on a

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} X_1\,dx + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)}$$
$$= X_2 + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)};$$

et l'on aura, en continuant de la même manière,

$$y = X_n + P_{n-1},$$

formule où l'on fait, pour abréger,

$$P_{n-1} = y_0 + y'_0\frac{x - x_0}{1} + \ldots + y_0^{(n-1)}\frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

et où X_n désigne le terme de rang $n+1$ dans la suite

$$X, X_1, X_2, \ldots, X_n;$$

ces fonctions, à partir de la deuxième, s'annulent pour $x = x_0$ et chacune d'elles est la dérivée de la suivante. On a évidemment

$$(2) \qquad X_n = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} X\,dx,$$

formule où le nombre des intégrations à exécuter est égal à n.

L'intégration par parties permet de transformer la formule précédente et de ramener le calcul de X_n à une

quadrature unique ; tel est l'objet que nous nous proposons ici.

On a

$$(3)\qquad X_1 = \int_{x_0}^{x} X\,dx,$$

et de même

$$X_2 = \int_{x_0}^{x} X_1\,dx.$$

L'intégration par parties change l'expression de X_2 en la suivante

$$X_2 = x X_1 - \int_{x_0}^{x} \frac{dX_1}{dx}\,x\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad X_2 = x\int_{x_0}^{x} X\,dx - \int_{x_0}^{x} X x\,dx.$$

Pareillement, on a

$$X_3 = \int_{x_0}^{x} X_2\,dx,$$

et, en intégrant par parties,

$$X_3 = X_2 x - \int_{x_0}^{x} \frac{dX_2}{dx}\,x\,dx = X_2 x - \int_{x_0}^{x} X_1\,x\,dx$$
$$= X_2 x - X_1\,\frac{x^2}{2} + \int_{x_0}^{x} \frac{dX_1}{dx}\,\frac{x^2}{2}\,dx,$$

c'est-à-dire, à cause des formules (3) et (4),

$$(5)\qquad X_3 = \frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} X\,dx - x\int_{x_0}^{x} X\,x\,dx + \int_{x_0}^{x} X\,\frac{x^2}{2}\,dx.$$

La comparaison des formules (3), (4), (5) fait pres-

sentir que l'on a généralement

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} X_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\Bigg[& x^{n-1}\int_{x_0}^{x} X\,dx - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x} Xx\,dx + \ldots \\ & + (-1)^i\frac{(n-1)\ldots(n-i)}{1.2\ldots i}x^{n-i-1}\int_{x_0}^{x} Xx^i\,dx + \ldots \\ & + (-1)^{n-1}\int_{x_0}^{x} Xx^{n-1}\,dx\Bigg], \end{aligned}\right.$$

et pour établir cette formule il suffit de prouver que si elle a lieu, pour une certaine valeur de n, elle subsiste aussi quand n augmente de 1. Multiplions donc la formule (6) par dx et intégrons ensuite, à partir de $x = x_0$; on aura dans le premier membre X_{n+1} : passons au second membre. Le terme

$$\int_{x_0}^{x}\left[x^{n-i-1}\int_{x_0}^{x} Xx^i\,dx\right]dx$$

deviendra, en appliquant l'intégration par parties,

$$\frac{1}{n-i}x^{n-i}\int_{x_0}^{x} Xx^i\,dx - \frac{1}{n-i}\int_{x_0}^{x} Xx^n\,dx,$$

et si l'on donne à i toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots (n-1)$, on voit que, dans la formule qui nous occupe, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} Xx^n dx$ se trouvera multipliée par

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left[-1 + \frac{n}{1} - \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{1}\right],$$

quantité qui est égale à $\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}$, à cause de $(1-1)^n = 0$. On aura donc

$$X_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[x^n\int_{x_0}^{x} X\,dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int_{x_0}^{x} Xx\,dx + \ldots + (-1)^n\int_{x_0}^{x} Xx^n\,dx\right]$$

ce qui est bien le résultat obtenu en changeant n en $n+1$ dans la formule (6).

Maintenant, si l'on écrit z au lieu de x sous chacun des signes $\int$ du second membre de la formule (6) et qu'on désigne par Z ce que devient X après ce changement, on pourra faire passer, sous chaque signe $\int$, les facteurs x qui le multiplient. Réunissant ensuite toutes les intégrales en une seule, on aura

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_{x_0}^{x} \left[x^{n-1} - \frac{n-1}{1} x^{n-2} z + \ldots + (-1)^{n-1} z^{n-1} \right] Z\,dz,$$

ou

$$(7) \qquad X_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} Z\,dz.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$(8) \qquad y = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} Z\,dz + P_{n-1},$$

P_{n-1} étant un polynôme arbitraire en x, du degré $n-1$.

694. Supposons que la fonction X soit la dérivée $f^{(n)}(x)$, d'ordre n, d'une fonction donnée $f(x)$; il est évident que l'équation

$$y = f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) - \ldots$$
$$- \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$

est l'intégrale de l'équation (1), prise de manière que y et ses $n-1$ premières dérivées se réduisent à zéro pour $x = x_0$. Mais la même intégrale sera donnée aussi par la formule (8), si l'on y remplace Z par $f^{(n)}(z)$ et que l'on

fasse $P_{n-1} = 0$; on a donc

$$f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1} f^{(n)}(z)\, dz,$$

ou, en posant $x = x_0 + h$ et $z = x_0 + h - t$ sous le signe $\int$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)} \int_0^h f^{(n)}(x_0 + h - t)\, t^{n-1}\, dt.$$

Notre analyse nous fournit ainsi une démonstration nouvelle de la formule de Taylor.

Des équations où ne figurent que deux dérivées consécutives de la fonction inconnue.

695. Considérons d'abord une équation de la forme

(1) $$F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ou

(2) $$F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0,$$

en posant

(3) $$\frac{dy}{dx} = p.$$

Supposons que l'on puisse résoudre l'équation (2) par rapport à $\frac{dp}{dx}$ et qu'on en tire $\frac{dp}{dx} = f(p)$, ou

(4) $$dx = \frac{dp}{f(p)},$$

on aura

$$(5)\qquad x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire, p_0 une valeur initiale quelconque.

Ensuite, si l'on peut résoudre l'équation (5) par rapport à p, de manière que l'on ait

$$p = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad dy = \varphi(x)\,dx,$$

on aura

$$(6)\qquad y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \mathrm{C}',$$

C' étant une deuxième arbitraire; l'équation (6) est l'intégrale générale de la proposée.

On peut encore obtenir cette intégrale par le procédé suivant, qu'on devra toujours employer quand l'équation (5) ne pourra pas être résolue par rapport à p. En multipliant l'équation (4) par p, elle devient

$$p\,dx = dy = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

d'où

$$(7)\qquad y = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{f(p)} + \mathrm{C}_1,$$

C_1 étant une constante arbitraire. Il est évident que l'intégrale générale demandée résulte de l'élimination de p entre les équations (5) et (7).

696. Si l'on ne peut pas résoudre l'équation (2) par rapport à $\dfrac{dp}{dx}$, mais qu'on sache la résoudre par rapport à p, on obtiendra comme il suit l'intégrale demandée. Posons

$$\frac{dp}{dx} = q,$$

et supposons que l'équation proposée donne

$$p = \varphi(q), \tag{8}$$

on aura, en différentiant,

$$dp = \varphi'(q)\,dq;$$

d'ailleurs,

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p\,dp}{q};$$

donc

$$dx = \frac{\varphi'(q)}{q}\,dq, \quad dy = \frac{\varphi(q)\,\varphi'(q)}{q}\,dq,$$

d'où, en intégrant,

$$x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)}{q}\,dq + C, \quad y = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi(q)\,\varphi'(q)}{q}\,dq + C_1, \tag{9}$$

C et C_1 étant deux constantes arbitraires; l'intégrale demandée sera le résultat de l'élimination de q entre les deux équations (9).

697. Supposons, enfin, que l'équation proposée ne puisse être résolue ni par rapport à p ni par rapport à q, mais qu'on sache exprimer p et q en fonction d'une nouvelle variable t, de manière que l'on ait

$$p = \varpi(t), \quad q = \psi(t); \tag{10}$$

on tire de là

$$dp = \varpi'(t)\,dt,$$

et les formules

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p\,dp}{q}$$

deviennent alors

$$dx = \frac{\varpi'(t)}{\psi(t)}\,dt, \quad dy = \frac{\varpi(t)\,\varpi'(t)}{\psi(t)}\,dt,$$

d'où

$$x = \int_{t_0}^{t} \frac{\varpi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \quad y = \int_{t_0}^{t} \frac{\varpi(t)\,\varpi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C_1, \tag{11}$$

C et C_1 étant deux arbitraires; l'intégrale demandée est ainsi donnée par les équations (11).

698. Exemple. — *Trouver la courbe plane dont le rayon de courbure a une projection de longueur constante sur une direction fixe.*

Le rayon de courbure a pour expression, dans le cas des coordonnées rectangulaires, $\dfrac{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$, et le cosinus de l'angle que forme sa direction avec l'axe des x est $\dfrac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\dfrac{dy^2}{dx^2}}}$. Si donc on prend pour axe des x la direction fixe donnée, l'équation du problème sera

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=a,$$

a étant une ligne donnée. En faisant, comme précédemment, $\dfrac{dy}{dx}=p$, cette équation devient

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p(1+p^2)}{a},$$

d'où

$$\frac{dx}{a}=\frac{dp}{p(1+p^2)}=\frac{dp}{p}-\frac{p\,dp}{1+p^2},$$

$$\frac{dy}{a}=\frac{dp}{1+p^2}.$$

Intégrant et désignant par x_0, y_0 deux constantes arbi-

traires, on a

$$\frac{x - x_0}{a} = \log \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \frac{y - y_0}{a} = \text{arc tang} p,$$

et l'élimination de p donne

$$\frac{x - x_0}{a} = \log \sin \frac{y - y_0}{a}.$$

699. Considérons plus généralement l'équation différentielle

(1) $$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

qui se réduit à

(2) $$F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0,$$

quand on pose

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = p.$$

Supposons que l'équation (2) puisse être résolue par rapport à $\frac{dp}{dx}$ et que l'on en tire

(3) $$\frac{dp}{dx} = f(p);$$

on aura, par l'intégration,

(4) $$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} + C,$$

C étant une constante. Si cette équation peut être résolue par rapport à p, on sera ramené à une équation de la forme

$$p = X \quad \text{ou} \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = X,$$

X étant une fonction donnée de x ; c'est le cas du n° 693.

700. Supposons que l'équation (4) ne puisse pas être résolue par rapport à p. On a, à cause de l'équation (3),

$$d\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{f(p)},$$

d'où, C_1 étant une constante arbitraire,

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{p_0}^{p}\frac{p\,dp}{f(p)} + C_1.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$P = \int_{p_0}^{p}\frac{p\,dp}{f(p)},$$

on pourra écrire

$$d\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = (P + C_1)\,dx = \frac{P_1\,dp}{f(p)} + C_1\,dx,$$

et, en intégrant,

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p}\frac{P_1}{f(p)}\,dp + C_1 x + C_2;$$

en continuant ainsi, on obtiendra la valeur de y par des quadratures.

Des équations où ne figurent que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités.

701. Soit d'abord l'équation

(1) $$F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0,$$

qui ne renferme que la fonction inconnue y avec sa dérivée du deuxième ordre.

Supposons, en premier lieu, qu'on puisse résoudre

l'équation par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$, et qu'on en tire

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

On aura, en multipliant par $2dy$,

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx} = 2f(y)dy.$$

Le premier membre est maintenant la différentielle de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; on a donc, en intégrant et en désignant par C une constante arbitraire, par y_0 une valeur initiale quelconque de y,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int_{y_0}^{y} 2f(y)dy + C.$$

On tire de là

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(y)dy + C}};$$

puis, comme les variables sont séparées,

$$(3) \qquad x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(y)dy + C}} + C',$$

C′ étant une nouvelle constante arbitraire. L'équation (3) est l'intégrale générale de la proposée.

702. Supposons qu'on ne puisse pas résoudre la proposée par rapport à $\frac{d^2y}{dx}$, mais qu'on sache la résoudre par rapport à y. Posons

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q,$$

et soit

(5) $$y = \varphi(q)$$

la valeur de y tirée de l'équation (1). La différentiation donne

$$dy = \varphi'(q)\,dq;$$

d'ailleurs on a, par les équations (4), $dy = \frac{p\,dp}{q}$; donc

$$p\,dp = q\varphi'(q)\,dq,$$

équation où les variables sont séparées. L'intégration donne, en désignant par C une constante,

(6) $$p^2 = \int_{q_0}^{q} 2q\varphi'(q)\,dq + C,$$

d'où

$$p = \sqrt{\int_{q_0}^{q} 2q\varphi'(q)\,dq + C};$$

l'équation $dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(q)\,dq}{p}$ devient alors

$$dx = \frac{\varphi'(q)\,dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q} 2q\varphi'(q)\,dq + C}},$$

d'où, en désignant par C_1 une deuxième arbitraire,

(7) $$x = \int_{q_0}^{q} \frac{\varphi'(q)\,dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q} 2q\varphi'(q) + C}} + C_1;$$

l'intégrale générale demandée est le résultat de l'élimination de q entre les équations (5) et (7).

703. Exemple. — Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - my = 0;$$

on en tire

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx} - 2my\,dy = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m(y^2 + C),$$

puis

$$\sqrt{m}\,dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2+C}},$$

et

$$x\sqrt{m} = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y^2+C}} + \text{const.},$$

ou

$$x\sqrt{m} = \log(y+\sqrt{y^2+C}) - \log C',$$

C′ étant une deuxième constante. On a ainsi

$$y+\sqrt{y^2+C} = C'e^{x\sqrt{m}},$$

et, en prenant les inverses de chaque membre,

$$-y+\sqrt{y^2+C} = \frac{C}{C'}e^{-x\sqrt{m}}.$$

En retranchant cette formule de la précédente, et écrivant simplement C, C′ au lieu de $\frac{C'}{2}$, $\frac{C}{2C'}$, on obtient

$$y = Ce^{x\sqrt{m}} + C'e^{-x\sqrt{m}},$$

ce qui est l'intégrale générale de la proposée.

Si m est un nombre négatif $-n^2$, on peut écrire

$$y = C\frac{e^{nx\sqrt{-1}}+e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} + C'\frac{e^{nx\sqrt{-1}}-e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

ou

$$y = C\cos nx + C'\sin nx,$$

C et C′ désignant encore deux constantes arbitraires. On

peut faire

$$C = A\cos\alpha, \quad C' = -A\sin\alpha,$$

et l'intégrale générale deviendra

$$y = A\cos(nx + \alpha),$$

A et α étant les deux constantes arbitraires.

704. On peut ramener au cas du n° 701 celui de l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les dérivées $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$.

Il suffit effectivement de poser

$$(2) \qquad \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p;$$

et la proposée deviendra

$$(3) \qquad F\left(\frac{d^2 p}{dx^2}, p\right) = 0,$$

La détermination de p en fonction de x n'offre que les difficultés de l'élimination, et elle se ramène, comme on l'a vu, aux quadratures.

Supposons que l'équation (3) puisse être résolue par rapport à $\frac{d^2 p}{dx^2}$, et que l'on ait

$$(4) \qquad \frac{d^2 p}{dx^2} = f(p);$$

on aura (n° 701)

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2\int_{p_0}^{p} f(p)\,dp + C} = \psi(p),$$

puis

$$(5) \qquad x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\psi(p)} + C',$$

C et C' étant deux constantes arbitraires.

Si l'équation (5) peut être résolue par rapport à p, on déterminera y par l'équation (2), qui rentre dans le cas du n° 693. Mais si l'on ne sait pas résoudre l'équation (5), on opérera comme au n° 700 : on a

$$d\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = p\,dx = \frac{p\,dp}{\psi(p)},$$

d'où

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^{p} \frac{p\,dp}{\psi(p)} + C_1 = P_1 + C_1,$$

C_1 étant une constante. On a ensuite

$$d\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = (P_1 + C_1)\,dx = \frac{P_1\,dp}{\psi(p)} + C_1\,dx,$$

d'où

$$\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = \int_{p_0}^{p} \frac{P_1\,dp}{\psi(p)} + C_1 x + C_2,$$

C_2 étant une nouvelle constante. Il est évident qu'en continuant ainsi on obtiendra la valeur de y par de simples quadratures.

Cas où l'on peut abaisser l'ordre des équations différentielles.

705. On peut abaisser l'ordre d'une équation différentielle, lorsque celle-ci ne renferme pas la fonction inconnue, mais seulement ses dérivées. Soit, en effet, l'équation d'ordre n,

$$F\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

qui ne renferme pas y et dans laquelle $\frac{d^m y}{dx^m}$ désigne la dérivée de l'ordre le moins élevé. Si l'on pose

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p,$$

l'équation proposée se réduira à l'équation d'ordre $n-m$,

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-m}p}{dx^{n-m}}\right) = 0.$$

Quand la valeur de p sera connue, on aura y par des quadratures.

En second lieu, on peut toujours abaisser d'une unité l'ordre d'une équation différentielle qui ne renferme pas la variable indépendante. Car soit l'équation d'ordre n

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

où ne figure pas la variable indépendante x; il est évident que, si l'on prend y pour variable indépendante, l'équation proposée rentrera dans le cas précédent. Posant donc

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d\left(p\frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, après la substitution de ces valeurs, l'équation se réduira à l'ordre $n-1$. La valeur de p en y étant connue, il restera à déterminer x par l'équation

$$dx = \frac{dy}{p},$$

ce qui n'exige qu'une quadrature.

706. Des équations homogènes par rapport a la fonction inconnue et a ses dérivées. — Si l'équation diffé-

rentielle d'ordre n,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

est homogène par rapport à $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$, on peut la ramener à l'ordre $n-1$ par la substitution

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

z étant une nouvelle fonction inconnue. Effectivement, la différentiation donne

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

. . . .

Après la substitution de ces valeurs, l'exponentielle disparaîtra nécessairement de l'équation proposée, puisque cette équation est homogène par rapport à y, $\frac{dy}{dx}, \dots$, et l'on aura une équation en z

$$\Phi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

dont l'ordre sera seulement $n-1$. La valeur de z étant connue, on aura celle de y par une quadrature.

707. On peut ramener au cas que nous venons de considérer celui d'une équation

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

qui ne renferme pas la variable indépendante x et qui est homogène par rapport à

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \cdots,$$

car, si l'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \quad \cdots;$$

après la substitution de ces valeurs, on aura une équation d'ordre $n-1$, laquelle sera homogène par rapport à p, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2p}{dy^2}$, $\cdots$, et qui, en conséquence, se ramènera à l'ordre $n-2$.

708. Des équations différentielles du deuxième ordre, homogènes par rapport aux variables et à leurs différentielles. — Soit

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

une équation du deuxième ordre, homogène par rapport à x, y, dx, dy, d^2y. Si l'on pose

$$(2) \qquad y = ux, \quad dy = p\,dx, \quad d^2y = \frac{q}{x}dx^2,$$

l'équation (1), après la substitution de ces valeurs, ne contiendra plus x, et elle sera de la forme

$$(3) \qquad f(u, p, q) = 0.$$

En effet, par hypothèse, l'équation (1) ne change pas quand on multiplie chacune des quantités x, y, dx, dy,

d^2y par un facteur quelconque; mais, après cette multiplication, les valeurs de u, p, q sont restées les mêmes; donc l'équation (3) ne peut pas renfermer x.

Les formules (2) donnent

$$dy = udx + xdu = pdx, \quad d^2y = dpdx = \frac{q}{x}dx^2,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{q}.$$

Supposons maintenant que l'on tire de l'équation (3)

$$q = \varphi(u, p),$$

on aura, par la formule (4),

$$(5) \qquad \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\varphi(u, p)},$$

équation différentielle du premier ordre entre les variables p et u. Lorsque cette équation aura été intégrée, la solution de la question proposée n'exigera plus qu'une quadrature, car, la valeur de p étant connue en fonction de u, on aura celle de x au moyen de la formule

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

dans laquelle les variables sont séparées.

Application des résultats qui précèdent à quelques exemples.

709. Problème I. — *Trouver la courbe plane dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel à une fonction donnée de l'abscisse.*

Si l'on désigne par x et y des coordonnées rectangu-

laires, l'équation du problème sera

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=f(x).$$

Elle ne renferme pas y, et on l'abaissera au premier ordre en posant

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx};$$

elle devient alors

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dx}{f(x)}.$$

Ici les variables sont séparées et l'intégration donne

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C,$$

d'où

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C}{\sqrt{1-\left[\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{f(x)}+C\right]^2}}=\varphi(x);$$

on aura y par une nouvelle quadrature, savoir :

$$y=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1.$$

Considérons, par exemple, le cas où la fonction donnée $f(x)$ a pour valeur

$$f(x)=\frac{a^2}{2x},$$

a étant une constante. On aura, en prenant $x_0=0$ et

en écrivant $\frac{c}{a^2}$ au lieu de C,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \varphi(x) = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}},$$

puis

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}}\, dx + C.$$

La courbe représentée par cette équation se rencontre dans la Mécanique et elle a reçu le nom de *courbe élastique :* son rayon de courbure varie en raison inverse de l'abscisse.

710. Problème II. — *Trouver la courbe plane dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel au cube de la normale.*

Si l'on désigne par x et y des coordonnées rectangulaires, par p la dérivée $\frac{dy}{dx}$, le rayon de courbure et la normale auront respectivement pour valeurs

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}, \quad y\sqrt{1 + p^2};$$

l'équation du problème proposé est donc

$$\frac{dp}{dx} = \pm \frac{a^2}{y^3},$$

a étant une ligne donnée. Cette équation du deuxième ordre ne renferme pas x ; il faut donc prendre y pour variable indépendante, et, en remplaçant dx par $\frac{dy}{p}$, on a

$$\pm p\frac{dp}{dy} = \frac{a^2}{y^3} \quad \text{ou} \quad \pm p\,dp = \frac{a^2\,dy}{y^3},$$

Les variables sont séparées, et l'on a, par l'intégration, en désignant par $\frac{1}{n}$ une constante arbitraire,

$$p^2 = \pm \frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{n};$$

d'où

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 \pm na^2}}{y\sqrt{n}},$$

et

$$dx = \sqrt{n}\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 \pm na^2}};$$

intégrant et désignant par x_0 une nouvelle constante arbitraire, on trouve

$$x - x_0 = \sqrt{n}\sqrt{y^2 \pm na^2}$$

ou

$$(x - x_0)^2 - ny^2 = \pm n^2 a^2.$$

La courbe demandée est donc, en général, une ellipse ou une hyperbole. Dans le cas de $\frac{1}{n} = 0$, on trouve une parabole.

711. Problème III. — *Trouver la courbe plane dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel à la normale.*

Désignons par n un nombre donné positif ou négatif. L'équation du problème sera

$$\frac{1 + p^2}{\frac{dp}{dx}} = ny;$$

elle ne renferme pas x et nous remplacerons dx par $\frac{dy}{p}$, comme dans le problème précédent; on aura ainsi

$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{2}{n}\,\frac{dy}{y}.$$

Les variables sont séparées, et l'intégration donne, en désignant par c une constante arbitraire,

$$\log(1+p^2) = \frac{2}{n}(\log y - \log c) = \log\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

d'où

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1},$$

et

$$dx = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy;$$

une seconde intégration donne enfin

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy,$$

x_0 désignant une constante arbitraire et y_0 une valeur initiale de y qu'on peut choisir à volonté.

L'expression de dx est celle d'une différentielle binôme, et les cas d'intégrabilité sont ceux dans lesquels $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ est un entier, c'est-à-dire ceux dans lesquels n est un entier. Les plus remarquables répondent à $n = \pm 1$, $n = \pm 2$.

1° Soit $n = -1$; on a, en prenant $y_0 = c$,

$$x - x_0 = \int_c^y \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

d'où

$$(x - x_0)^2 + y^2 = c^2;$$

la courbe demandée est une circonférence.

2° Soit $n = +1$; on a

$$\frac{x - x_0}{c} = \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \log\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

d'où

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{x - x_0}{c}}$$

et, en prenant les inverses de chaque membre,

$$\frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{x - x_0}{c}}.$$

On a, en ajoutant les deux équations précédentes,

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{-\frac{x - x_0}{c}}\right);$$

la courbe demandée est donc une chaînette (n° 224).

3° Soit $n = -2$; on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c - y}{y}},$$

ce qui est l'équation différentielle d'une cycloïde dans laquelle le diamètre du cercle générateur est égal à c (n° 231).

4° Soit $n = +2$; on a

$$x - x_0 = \sqrt{c}\int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y - c}} = 2\sqrt{c}\sqrt{y - c},$$

d'où

$$y - c = \frac{(x - x_0)^2}{4c},$$

ce qui est l'équation d'une parabole.

712. Problème IV. — *Trouver la surface de révolution pour laquelle la courbure moyenne aux divers points est constante.*

Dans une surface de révolution, les méridiens et les parallèles constituent les deux systèmes de lignes de courbure. Il s'ensuit que l'un des rayons de courbure

principaux est celui de la méridienne et que le rayon de la seconde courbure est la partie de la normale comprise entre l'axe et la surface. Si l'on désigne par R le premier de ces rayons, par N le second, l'équation du problème sera

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a},$$

a étant une ligne donnée. Dans cette formule, R et N sont de même signe ou de signes contraires, selon que ces rayons ont la même direction ou des directions opposées. Rapportons l'un des méridiens à deux axes rectangulaires, dont l'un, celui de x, coïncide avec l'axe de la surface; R et N seront de même signe si y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signes contraires, et inversement; il faut donc prendre

$$R = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = +y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

le signe du radical $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ qui figure dans ces expressions étant d'ailleurs arbitraire. Alors l'équation précédente deviendra

$$-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{1}{a}.$$

Cette équation ne renferme pas x, et on l'abaissera au premier ordre en posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{d^2x} = p\frac{dp}{dy};$$

elle devient ainsi

$$-\frac{p\frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{y\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}.$$

Pour l'intégrer, il suffit de multiplier par $y\,dy$, ce qui donne

$$-y\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{dy}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{y\,dy}{a};$$

le premier membre est la différentielle exacte de $\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}$, et l'on a, par conséquent,

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{y^2\pm b^2}{2a},$$

$\pm\frac{b^2}{2a}$ étant la constante arbitraire introduite par l'intégration. On tire de là

$$p=\frac{\sqrt{4a^2y^2-(y^2\pm b^2)^2}}{y^2\pm b^2},$$

et, à cause de $p=\frac{dy}{dx}$,

$$dx=\frac{(y^2\pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2\pm b^2)^2}};$$

la question est donc ramenée aux quadratures.

713. Si la constante b est nulle, l'équation précédente se réduit à

$$dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{4a^2-y^2}},$$

en faisant abstraction de la solution particulière $y=0$. L'intégration donne

$$x-x_0+\sqrt{4a^2-y^2}=0,\quad \text{d'où}\quad (x-x_0)^2+y^2=4a^2,$$

ce qui représente une circonférence; il est évident *a priori* que la sphère est l'une des surfaces demandées.

Si l'on pose $b^2 = ca$, c étant une nouvelle constante, et que l'on fasse ensuite $a = \infty$, l'équation différentielle que nous avons obtenue se réduira à la suivante :

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{4y^2 - c^2}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{2(x - x_0)}{c} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{1}{2}c}$$

et

$$y = \frac{c}{4}\left[e^{\frac{2(x-x_0)}{c}} + e^{-\frac{2(x-x_0)}{c}}\right],$$

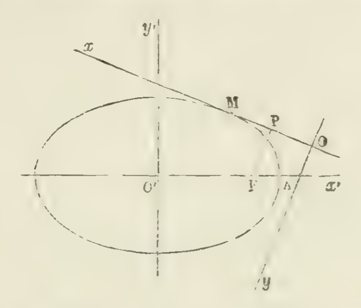
x_0 étant la constante arbitraire. Cette équation est celle de la chaînette, qui est le lieu décrit par le foyer d'une parabole roulant sans glisser sur une droite fixe (n° 224), et la surface de révolution que cette courbe engendre en tournant autour de l'axe des abscisses a cette propriété que la courbure moyenne est nulle en chaque point, c'est-à-dire que les rayons des courbures principales sont égaux et dirigés en sens contraire.

En partant de ce fait et en remarquant que, dans le cas général où les constantes a et b restent indéterminées, l'intégrale de la différentielle dx ne renferme pas d'autres transcendantes que celles qui expriment les arcs d'ellipse ou d'hyperbole, Delaunay a pensé que la méridienne de la surface de révolution de courbure moyenne constante devait pouvoir être engendrée par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole roulant sans glisser sur une droite fixe. Il a effectivement démontré cette élégante proposition dans un article qui fait partie du tome VI, 1re série, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées;* on peut en vérifier l'exactitude comme il suit.

Soit

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes; désignons par c la distance $\sqrt{a^2 - b^2}$ du centre au foyer F, par s' l'arc AM de l'ellipse, compris entre le sommet A et le



point $M(x', y')$. Menons au point M la tangente Ox, prenons à partir de M une longueur $MO = s'$ et élevons par le point O la droite Oy, perpendiculaire à Ox. Désignons enfin par y la perpendiculaire FP abaissée du foyer F sur la tangente Ox et par x la distance PO du pied de cette perpendiculaire au point O. On aura, par les formules connues,

$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}},$$

$$x = s' - \frac{cyy'}{b^2}.$$

La première de ces équations et celle de l'ellipse déterminent x' et y' en fonction de y; on trouve

$$x' = \frac{a^2}{c}\,\frac{b^2 - y^2}{b^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{b^2\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{c(b^2 + y^2)},$$

d'où l'on conclut facilement

$$ds' = \frac{8a^2 b^2 y^2\, dy}{(b^2+y^2)^2\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}},$$

$$\frac{c}{b^2}\, d(yy') = \frac{8a^2b^2y^2 - (b^2+y^2)^3}{(b^2+y^2)^2\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}}\, dy.$$

La différence des premiers membres de ces formules n'est autre chose que dx; on a donc

$$dx = \frac{(b^2+y^2)\, dy}{\sqrt{4a^2y^2-(b^2+y^2)^2}}.$$

Il est évident que cette équation différentielle est celle de la courbe décrite par le foyer F quand l'ellipse roule sans glisser sur la droite Ox, et, si l'on veut substituer une hyperbole à l'ellipse, il suffira d'écrire $-b^2$ au lieu de $+b^2$, dans la précédente équation. On voit que celle-ci coïncide avec l'équation du problème que nous nous étions proposé.

714. Problème V. — *On demande de trouver l'intégrale générale de l'équation du deuxième ordre*

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2y^2}{x^3} = 0.$$

Cette équation est homogène par rapport à y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; on doit donc poser (n° 706)

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right) e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

et, après la substitution, on a l'équation du premier ordre

$$z\frac{dz}{dx} + z^3 + \frac{2}{x^3} = 0,$$

que l'on peut intégrer facilement, car on la rend homo-

gène en posant

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2};$$

elle devient effectivement, par cette substitution,

$$t^2 z\,dz - (z^3 + 2t^3)\,dt = 0.$$

Enfin, si l'on pose (n° 654)

$$z = ut, \quad dz = u\,dt + t\,du,$$

elle prendra la forme

$$\frac{dt}{t} - \frac{u\,du}{u^3 - u^2 + 2} = 0$$

ou

$$\frac{dt}{t} + \frac{1}{5}\frac{du}{u+1} - \frac{1}{5}\frac{(u-1)\,du}{(u-1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{du}{(u-1)^2+1} = 0;$$

intégrant, et remettant $\frac{1}{x}$ au lieu de t, zx au lieu de u, il vient

$$-\log x + \frac{1}{5}\log\frac{xz+1}{\sqrt{(xz-1)^2+1}} = -\frac{3}{5}\,\mathrm{arc\,tang}(xz-1)$$

La valeur de z étant définie par cette équation, l'intégrale générale demandée sera

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx};$$

elle renferme les deux constantes arbitraires x_0 et C.

715. Problème VI. — *Trouver la courbe plane dont les arcs sont proportionnels aux arcs correspondants de la développée.*

Désignons par s l'arc de la courbe inconnue compté à partir d'un point fixe de cette courbe, par s_1 l'arc correspondant de la développée, par α une constante

donnée; l'équation du problème proposé sera

$$s_1 = \alpha s \quad \text{ou} \quad ds_1 = \alpha\, ds,$$

ou, comme ds_1 est égale à la différentielle du rayon de courbure R de la courbe demandée,

$$d\mathrm{R} = \alpha\, ds.$$

Si l'on introduit les coordonnées rectangulaires x, y, cette équation sera de troisième ordre, et, par conséquent, l'intégration amènera trois constantes arbitraires. On effectue facilement cette intégration en opérant comme il suit.

Soit φ l'inclinaison de la tangente de la courbe cherchée sur l'axe des x; on aura

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\varphi},$$

et notre équation différentielle deviendra

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \alpha\, d\varphi;$$

l'intégration donne

$$\log \mathrm{R} - \log a = \alpha\varphi \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = ae^{\alpha\varphi},$$

a étant une constante arbitraire. On a donc aussi

$$ds = ae^{\alpha\varphi}\, d\varphi,$$

et par conséquent

$$dx = ae^{\alpha\varphi}\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = ae^{\alpha\varphi}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Ajoutons ces équations; après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, il viendra

$$d\left(x + y\sqrt{-1}\right) = ae^{(\alpha+\sqrt{-1})\varphi}\, d\varphi.$$

Intégrant et désignant par $x_0 + y_0\sqrt{-1}$ une constante arbitraire, on a

$$(x - x_0) + (y - y_0)\sqrt{-1} = \frac{a}{\alpha + \sqrt{-1}}\, e^{(\alpha+\sqrt{-1})\varphi}.$$

Cette équation se décompose en deux autres, et, si entre celles-ci on élimine l'angle φ, on obtiendra l'intégrale générale demandée, qui renfermera les trois arbitraires a, x_0, y_0.

Posons

$$\frac{a}{\alpha + \sqrt{-1}} = me^{\mu\sqrt{-1}},$$

puis

$$x - x_0 = \rho\cos(\omega + \mu), \quad y - y_0 = \rho\sin(\omega + \mu);$$

ρ et ω seront des coordonnées polaires, et l'équation précédente deviendra

$$\rho e^{\omega\sqrt{-1}} = me^{\alpha\varphi}e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

d'où

$$\rho = me^{\alpha\varphi}, \quad \omega = \varphi,$$

et par conséquent

$$\rho = me^{\alpha\omega}.$$

Ainsi la spirale logarithmique est la seule courbe qui possède la propriété en question.

La solution précédente fournit un exemple des simplifications que peuvent comporter les problèmes du genre de celui que nous venons de traiter.

716. Problème VII. — *Trouver la courbe plane dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur issu d'un point fixe.*

Considérant la courbe inconnue comme l'enveloppe de ses tangentes, nous emploierons (n° 210) les deux équations

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = f(\varphi),$$
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = f'(\varphi),$$

qui permettent d'exprimer les coordonnées rectangulaires x, y en fonction des variables φ et $f(\varphi)$. On tire

de ces équations

$$x = f(\varphi)\sin\varphi + f'(\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = -f(\varphi)\cos\varphi + f'(\varphi)\sin\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{f^2(\varphi)+f'^2(\varphi)},$$

puis

$$dx = [f(\varphi)+f''(\varphi)]\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = [f(\varphi)+f''(\varphi)]\sin\varphi\, d\varphi$$

et

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = ds = [f(\varphi)+f''(\varphi)]\, d\varphi.$$

Le rayon de courbure étant égal à $\frac{ds}{d\varphi}$ et le rayon vecteur à $\sqrt{x^2+y^2}$, l'équation du problème sera

$$\frac{d^2f}{d\varphi^2} + f = m\sqrt{f^2 + \frac{df^2}{d\varphi^2}},$$

m étant un nombre donné. Comme elle ne renferme pas φ, nous poserons

$$\frac{df}{d\varphi} = f', \quad \frac{d^2f}{d\varphi^2} = f'\frac{df'}{df},$$

et il viendra

$$f'\frac{df'}{df} + f = m\sqrt{f^2+f'^2}.$$

Cette équation du premier ordre s'intègre immédiatement, car on peut lui donner la forme

$$\frac{f\,df + f'\,df'}{\sqrt{f^2+f'^2}} = m\,df;$$

le premier membre est la différentielle exacte de $\sqrt{f^2+f'^2}$, et l'intégration donne

$$\sqrt{f^2+f'^2} = m(f-\text{C}),$$

C étant une constante arbitraire. Comme $f' = \frac{df}{d\varphi}$, on a

ensuite

$$d\varphi = \frac{df}{\sqrt{m^2(f-C)^2 - f^2}}.$$

Si l'on a $m < 1$, l'intégration donnera

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \arcsin\left(\frac{1-m^2}{mC} f + m\right),$$

φ_0 étant une constante. On tire de là, en faisant $\frac{mC}{1-m^2} = a$, $\sqrt{1-m^2} = \mu$,

$$f(\varphi) = -a\sqrt{1-\mu^2} + a \sin\mu(\varphi - \varphi_0),$$

ce qui montre que la courbe demandée est algébrique quand μ est commensurable.

Si l'on a $m > 1$, l'intégration de la différentielle $d\varphi$ donnera

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \log\left(t + \sqrt{t^2-1}\right),$$

t désignant la quantité $\frac{m^2-1}{mC} f - m$, et φ_0 étant la constante; on tire de là, en faisant $\frac{mC}{m^2-1} = a$, $\sqrt{m^2-1} = \mu$,

$$f(\varphi) = a\sqrt{1+\mu^2} + a\frac{e^{\mu(\varphi-\varphi_0)} + e^{-\mu(\varphi-\varphi_0)}}{2}.$$

Enfin, dans le cas de $m = 1$, on a

$$d\varphi = -\frac{df}{\sqrt{-2Cf + C^2}},$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{C}{2} = a$,

$$f(\varphi) = a[1 - (\varphi - \varphi_0)^2].$$

Usage d'un facteur pour l'intégration des équations différentielles d'ordre quelconque.

717. Considérons une équation différentielle d'ordre n entre les variables x et y, et supposons qu'on l'ait mise sous la forme

$$(1)\qquad P\frac{d^n y}{dx^n} + Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. On peut écrire

$$(2)\qquad Pd\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\,dx = 0,$$

et s'il arrive que le premier membre de cette équation soit la différentielle exacte d'une fonction u de x, y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, il est évident que l'équation

$$u = \text{const.}$$

sera l'une des intégrales premières de la proposée.

Quelles que soient les fonctions P et Q, il existe toujours des facteurs λ propres à rendre le premier membre de l'équation (2) la différentielle exacte d'une fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. En effet, considérons l'une des intégrales premières de l'équation (2), et soit

$$u = C$$

cette intégrale résolue par rapport à la constante qu'elle renferme. Différentions-la et écrivons, pour abréger, $y^{(i)}$ au lieu de $\frac{d^i y}{dx^i}$; on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)} = 0,$$

et la valeur de $y^{(n)}$ tirée de cette équation coïncidera

avec celle qui est donnée par la proposée, savoir

$$Q + Py^{(n)} = 0;$$

on a donc

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}}}{P} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}y' + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}}{Q},$$

d'où, en désignant par λ la valeur commune de ces rapports,

$$\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} = \lambda P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y' + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} = \lambda Q.$$

Il résulte de là que l'expression

$$\lambda P dy^{(n-1)} + \lambda Q dx$$

est une différentielle exacte du.

On peut établir, par un raisonnement analogue à celui du n° 683, que la solution particulière de l'équation proposée doit satisfaire à l'équation $\frac{1}{\lambda} = 0$; nous nous bornons à indiquer cette proposition, que nous ne croyons pas utile de développer ici.

La recherche des facteurs dont il vient d'être question présente en général des difficultés insurmontables; il y a cependant des cas où l'on parvient facilement à les découvrir. Nous allons en présenter un exemple, qui est un de ceux qu'Euler a considérés.

718. L'équation dont nous allons nous occuper est la suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha y}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2} = 0.$$

En examinant sa forme, on voit qu'il y a lieu de chercher s'il n'existerait pas un facteur tel que $\left(2X_1 \frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right) dx$

propre à rendre son premier membre la différentielle exacte d'une fonction u de $x, y, \frac{dy}{dx}$. Si une telle fonction u existe, la partie $\frac{du}{d\frac{dy}{dx}} d\frac{dy}{dx}$ de sa différentielle totale aura pour valeur

$$\frac{d\left[X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2X_2 y\frac{dy}{dx}\right]}{d\frac{dy}{dx}} d\frac{dy}{dx},$$

et l'on aura, en conséquence,

$$u = X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2X_2 y\frac{dy}{dx} + U,$$

U étant une fonction des seules variables x et y. En égalant à zéro la différentielle du, on a

$$\begin{aligned}&\left(2X_1\frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right)\frac{d^2y}{dx^2}\\ &\quad + \left(\frac{dX_1}{dx} + 2X_2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dX_2}{dx} y\frac{dy}{dx} + dU \times \frac{1}{dx} = 0,\end{aligned}$$

et, pour que cette équation coïncide avec la proposée, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned}dU = {}& \frac{2\alpha X_1 y\, dy + 2\alpha X_2 y^2 dx}{(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)^2}\\ &- \left(\frac{dX_1}{dx} + 2X_2\right)\frac{dy^2}{dx} - 2\frac{dX_2}{dx} y\, dy.\end{aligned}$$

La première partie de cette valeur de dU deviendra une différentielle exacte si l'on pose

$$X_1 = \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2,$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}\frac{dX_1}{dx} = -\delta - \varepsilon x,$$

et il arrive alors que la partie restante est elle-même

une différentielle exacte. On a

$$dU = -\frac{\alpha}{\beta}\, d\,\frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon\, d(y^2),$$

et, par conséquent,

$$U = -\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon y^2 + C,$$

C étant une constante.

Le facteur dont nous avons fait usage est

$$2(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)\frac{dy}{dx} - 2(\delta + \varepsilon x)y,$$

et nous en concluons cette intégrale première de la proposée, savoir

$$(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(\delta + \varepsilon x)y\,\frac{dy}{dx}$$
$$- \frac{\alpha(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)}{\beta(\beta y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)} + \varepsilon y^2 + C = 0.$$

Usage de la différentiation pour l'intégration des équations différentielles.

719. Soit

$$(1) \qquad U = 0$$

une équation différentielle d'un ordre quelconque n entre les deux variables x et y. En la différentiant, on obtiendra une équation d'ordre $n+1$

$$(2) \qquad U_1 = 0,$$

et l'on pourra former ensuite diverses combinaisons des équations (1) et (2). Soit

$$(3) \qquad V_1 = 0$$

l'équation d'ordre $n+1$ qui résulte de l'une de ces combinaisons. Si l'on peut trouver une intégrale première

de l'équation (3) distincte de la proposée, on connaîtra aussi une intégrale première de cette dernière ; car, si

$$(4) \qquad V = 0$$

est une intégrale première de l'équation (3), et que l'élimination de $\frac{d^n y}{dx^n}$ entre les équations (1) et (4) donne pour résultat

$$(5) \qquad W = 0,$$

cette équation (5), qui est de l'ordre $n - 1$ et qui renferme une constante arbitraire, sera évidemment une intégrale première de l'équation (1).

Si l'équation (1) est du premier ordre, l'équation (5) fera connaître son intégrale générale.

720. Exemple. — Pour donner un exemple de cette méthode d'intégration, proposons-nous de trouver les lignes de courbure d'une surface du deuxième ordre à centre. L'équation de cette surface étant

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

si l'on pose

$$A = \frac{(c^2 - b^2)\rho^2}{c^2(\rho^2 - b^2)}, \quad B = \frac{b^2\rho^2}{c^2},$$

l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan xy sera (n° 341)

$$(1) \qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

On a, par la différentiation de cette équation,

$$(2) \quad \begin{cases} \left(2Axy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 - B\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ \qquad + \left(A\dfrac{dy^2}{dx^2} + 1\right)\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right) = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de $x^2 - Ay^2 - B$ entre les équations (1) et (2) donne, après la suppression du facteur $A\frac{dy^2}{dx^2}+1$ commun à tous les termes,

$$(3) \qquad xy\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

Si l'on divise cette équation par $xy\frac{dy}{dx}$, elle devient

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}+\frac{\frac{dy}{dx}}{y}-\frac{1}{x}=0;$$

les variables sont séparées, et l'on a, par l'intégration,

$$\log\frac{dy}{dx}+\log y-\log x=\log C$$

ou

$$(4) \qquad \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=C,$$

C étant une constante. L'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (1) et (4) donne

$$(5) \qquad y^2-Cx^2+\frac{BC}{AC+1}=0,$$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus précédemment par d'autres méthodes (nos 338 et 650).

Solution d'un problème qui exige l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées.

721. Nous avons vu que l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées d'ordres quelconques se ramène toujours, par l'élimination, à l'intégration d'une ou de plusieurs équations qui ne renferment chacune que deux variables; mais une telle réduction n'est pas toujours de nature à simplifier le

problème qu'il s'agit de résoudre. En l'absence de toute méthode générale d'intégration, il ne sera pas inutile de présenter ici un exemple particulier, que nous empruntons à la Géométrie.

Problème. — *Trouver les trajectoires orthogonales d'un plan mobile.*

Soient x, y, z trois coordonnées rectangulaires, et

$$(1)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - u = 0$$

l'équation du plan mobile; la distance u de ce plan à l'origine et les angles α, β, γ qu'elle forme avec les axes sont des fonctions données d'un paramètre t. Les trajectoires demandées devant être perpendiculaires au plan, les équations différentielles du problème sont

$$(2)\qquad \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma};$$

on peut concevoir que l'on ait tiré de l'équation (1) la valeur de t en fonction de x, y, z, et les cosinus des angles α, β, γ doivent être regardés dans les équations (2) comme des fonctions données des variables x, y, z. Pour intégrer ces équations (2), je ferai usage des formules que j'ai établies au n° 274, et je conserverai les notations de ce numéro. Ainsi, les angles α, β, γ étant évidemment ceux que forme, avec les directions des axes, la tangente de la courbe cherchée, je désignerai par ξ, η, ζ et par λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur de la courbe; en outre, $d\sigma$, $d\tau$ désigneront les angles de contingence et de torsion, ds la différentielle de l'arc de courbe, en sorte que l'on aura

$$(3)\qquad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \\ d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}. \end{cases}$$

Cela posé, chaque membre de la formule (2) est égal à ds, et l'on a, en conséquence,

$$(4)\qquad dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma.$$

Posons

$$(5)\qquad x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = \mathrm{U};$$

en différentiant deux fois cette équation (5) et ayant égard aux équations (4), on aura (n° 274)

$$(6)\qquad x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta = \frac{d\mathrm{U}}{d\tau},$$

$$(7)\qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = -\frac{d\tau}{d\sigma}\left(\mathrm{U} + \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{d\tau}}{d\tau}\right).$$

La comparaison des équations (1) et (7) donne

$$(8)\qquad \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{d\tau}}{d\tau} + \mathrm{U} = -u\,\frac{d\sigma}{d\tau},$$

D'après la première équation (3), $d\sigma$ est le produit par dt d'une fonction donnée de t, puisque $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont elles-mêmes des fonctions données de ce paramètre. Ensuite, d'après les formules du n° 274, $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ et $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sont elles-mêmes des fonctions connues de t; enfin $d\tau$ est, d'après la deuxième formule (3), le produit d'une telle fonction par dt. Il résulte de là que l'équation (8) est une équation différentielle du deuxième ordre entre les variables U et t; l'intégration amènera donc deux constantes arbitraires. Quand la valeur de U sera connue, les coordonnées x, y, z seront données en fonction du paramètre t par les équations (5), (6), (7); ces équations peuvent être représentées par

$$(9)\qquad \mathrm{V} = 0,\quad d\mathrm{V} = 0,\quad d^2\mathrm{V}$$

si l'on pose

$$(10)\qquad \mathrm{V} = x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - \mathrm{U}.$$

L'équation (8) appartient à la classe de celles dont la théorie fera l'objet du Chapitre suivant; mais on l'intègre très-facilement en faisant usage des formules du n° 210. Effectivement, soient X, Y deux nouvelles variables définies par les équations

$$\mathrm{X}\sin\tau - \mathrm{Y}\cos\tau = \mathrm{U}, \quad \mathrm{X}\cos\tau + \mathrm{Y}\sin\tau = \frac{d\mathrm{U}}{d\tau};$$

on aura

$$\mathrm{X} = \mathrm{U}\sin\tau + \frac{d\mathrm{U}}{d\tau}\cos\tau, \quad \mathrm{Y} = -\mathrm{U}\cos\tau + \frac{d\mathrm{U}}{d\tau}\sin\tau,$$

puis

$$d\mathrm{X} = \left(\mathrm{U} + \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{d\tau}}{d\tau}\right)\cos\tau\,d\tau, \quad d\mathrm{Y} = \left(\mathrm{U} + \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{d\tau}}{d\tau}\right)\sin\tau\,d\tau,$$

et, à cause de l'équation (8),

$$d\mathrm{X} = -u\frac{d\sigma}{d\tau}\cos\tau\,d\tau, \quad d\mathrm{Y} = -u\frac{d\sigma}{d\tau}\sin\tau\,d\tau.$$

Intégrant et désignant par A et B deux constantes arbitraires, on aura

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} - \int_{\tau_0}^{\tau} u\frac{d\sigma}{d\tau}\cos\tau\,d\tau, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{B} - \int_{\tau_0}^{\tau} u\frac{d\sigma}{d\tau}\sin\tau\,d\tau,$$

et, par suite,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} = \mathrm{A}\sin\tau - \mathrm{B}\cos\tau - \sin\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u\frac{d\sigma}{d\tau}\cos\tau\,d\tau \\ + \cos\tau \int_{\tau_0}^{\tau} u\frac{d\sigma}{d\tau}\sin\tau\,d\tau. \end{aligned}\right.$$

Cette formule (11) donne l'expression de U en fonction de τ, ou, si l'on veut, en fonction du paramètre t; le problème proposé est donc résolu.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Des équations linéaires.

722. On nomme *équations différentielles linéaires* celles dans lesquelles les fonctions inconnues et leurs dérivées n'entrent qu'au premier degré et ne se multiplient pas entre elles.

La variable indépendante étant représentée par x et la fonction inconnue par y, la forme générale des équations linéaires à deux variables est

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{P}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{T}\frac{dy}{dx} + \mathrm{U}y = \mathrm{V},$$

les coefficients P, ..., T, U étant, ainsi que V, des fonctions données de x qui peuvent se réduire à des constantes.

Lorsque la quantité V sera nulle, nous dirons, pour abréger le discours, que *l'équation linéaire n'a pas de second membre.* On verra plus loin que l'intégration des équations linéaires pourvues d'un second membre se ramène à l'intégration de celles qu'on en déduit par la suppression du second membre.

Il est évident (n° 645) que les équations linéaires n'ont pas de solutions particulières.

Propriétés des équations linéaires dépourvues de second membre.

723. Première propriété. — *L'ordre d'une équation linéaire sans second membre peut toujours être abaissé d'une unité.*

Effectivement l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

appartient à la classe des équations homogènes ; on abaissera donc son ordre d'une unité en posant (n° 606)

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = ze^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right)e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}, \quad \ldots;$$

mais on doit remarquer que la transformée obtenue n'est pas linéaire.

Par exemple, dans le cas de $n = 2$, la proposée est

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

et notre transformation donne

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0.$$

724. Deuxième propriété. — *Si l'équation linéaire sans second membre*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

est satisfaite quand on pose $y = y_1$, *elle est également satisfaite par* $y = Cy_1$, C *étant une constante arbitraire.*

Effectivement, le résultat de la substitution de Cy_1 à y dans le premier membre de l'équation est égal au produit de la constante C par le résultat de la substitution de y_1.

725. Troisième propriété. — *Si la même équation linéaire est satisfaite quand on pose* $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_i$, *elle est aussi satisfaite par* $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_i$.

En effet, le résultat de la substitution de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_i$$

à y dans le premier membre de l'équation est évidemment la somme des résultats que l'on obtient quand on substitue successivement y_1, y_2, ..., y_i.

Il résulte de cette propriété et de la précédente que, si l'on connaît i solutions $y_1, y_2, \ldots, y_i$ de l'équation linéaire sans second membre, on pourra former une solution de la même équation contenant i constantes arbitraires, savoir

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_i y_i.$$

Et si le nombre i est égal à l'ordre n de l'équation, on aura de cette manière l'intégrale générale de l'équation différentielle, pourvu cependant que les arbitraires soient telles qu'on puisse attribuer à la fonction y et à ses $n - 1$ premières dérivées des valeurs arbitraires répondant à une valeur x_0 de x choisie à volonté. Cette dernière condition ne serait pas remplie s'il existait une relation linéaire entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$, car, dans ce cas, on a

$$y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant des coefficients constants; cette valeur de y_n étant substituée dans l'expression de y, celle-ci se réduit à la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1},$$

et, comme elle ne renferme pas n arbitraires, elle ne peut être l'intégrale générale.

726. Quatrième propriété. — *Toutes les solutions d'une équation linéaire d'ordre* n, *sans second membre,*

sont comprises dans l'expression

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

C_1, C_2, ..., C_n *étant des constantes arbitraires et* y_1, y_2, ..., y_n *des fonctions déterminées de la variable indépendante.*

Cette proposition est évidente dans le cas de $n = 1$, car l'équation différentielle est alors

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = -P\,dx,$$

et l'on en tire

$$y = C_1 y_1,$$

en posant

$$y_1 = e^{-\int_{x_0}^{x} P\,dx}.$$

Il suffit, d'après cela, de démontrer que, si la propriété en question appartient aux équations d'ordre $n-1$, elle appartient aussi aux équations d'ordre n. Supposons donc que l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

soit satisfaite par $y = y_1$, y_1 étant une fonction de x sans constante arbitraire, et faisons la substitution

$$y = y_1 z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = y_1\frac{dz}{dx} + z\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_1\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots;$$

ces valeurs ayant été substituées dans la proposée, il est évident que le coefficient de z sera

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy_1}{dx} + Uy_1,$$

expression dont la valeur est nulle, par hypothèse. Si l'on pose $\frac{dz}{dx} = u$, l'équation en u sera linéaire, sans second membre et d'ordre $n-1$; la formule donnant toutes les solutions sera donc

$$u = C_2 u_1 + C_3 u_2 + \ldots + C_n u_{n-1},$$

et, par conséquent, la valeur générale de z sera

$$z = C_1 + C_2 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \ldots + C_n \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\, dx.$$

Ainsi l'on aura, pour l'expression générale de y,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \ldots + C_n y_1 \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\, dx,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Intégration d'une équation linéaire pourvue d'un second membre, dans le cas où l'on connaît l'intégrale générale de l'équation privée de second membre.

727. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(1) \qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy,$$

P, ..., T, U étant des fonctions données de x, et considérons l'équation linéaire d'ordre n

$$(2) \qquad \Phi(y) = V,$$

dont le second membre V est également une fonction donnée de x. Je dis que, si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation

$$(3) \qquad \Phi(y) = 0$$

dépourvue de second membre, on pourra en conclure l'intégrale de l'équation (2), par de simples quadratures.

Soit

$$(4) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

l'intégrale générale de l'équation (3), C_1, C_2, ..., C_n étant des constantes arbitraires. Si l'on regarde les arbitraires C_1, C_2, ..., C_n comme des fonctions de x indéterminées, le second membre de la formule (4) pourra représenter une fonction quelconque, et, par conséquent, cette formule (4) est susceptible d'exprimer, en particulier, l'intégrale générale de l'équation (2). On peut même, si l'on veut, attribuer à $n-1$ des arbitraires C_1, C_2, ..., C_n telles valeurs que l'on voudra ou établir entre elles $n-1$ relations quelconques, car. l'une de ces arbitraires demeurant une fonction indéterminée, nous ne faisons autre chose que substituer à y une variable nouvelle.

Différentiant donc l'équation (4) dans l'hypothèse des arbitraires variables, nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_n}{dx} \\ + y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx},\end{aligned}$$

et, puisque nous pouvons établir $n-1$ relations entre les arbitraires, nous poserons d'abord la suivante :

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0;$$

par conséquent, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ sera simplement

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_n}{dx},$$

en sorte qu'elle a la même forme que dans l'hypothèse des arbitraires constantes. Formons pareillement les

dérivées suivantes de y, jusqu'à celle de l'ordre $n-1$, en opérant de la même manière, c'est-à-dire en établissant entre les arbitraires les relations nécessaires pour que les expressions des dérivées de y soient les mêmes que dans l'hypothèse des arbitraires constantes. Il est évident que les relations dont il s'agit seront

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0, \\ & \frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx} = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx} = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura, en même temps,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \\ & \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_n}{dx}, \\ & \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + C_n \frac{d^2y_n}{dx^2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

Il nous faut encore la valeur de $\frac{d^n y}{dx^n}$; mais nous ne pouvons plus établir de relation nouvelle entre les arbitraires, et la dernière des équations (6) nous donnera, par la différentiation,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} = {} & C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} \\ & + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Substituons maintenant, dans l'équation (2), les valeurs

de y et de ses n premières dérivées, tirées des équations (6) et (7); il viendra

$$C_1\Phi(y_1)+C_2\Phi(y_2)+\ldots+C_n\Phi(y_n)$$
$$+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}=V.$$

Or les quantités $\Phi(y_1)$, $\Phi(y_2)$, ..., $\Phi(y_n)$ sont nulles par hypothèse; donc on a

$$(8)\quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}=V.$$

Maintenant, si le déterminant

$$(9)\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les équations (5) et (8) donneront, pour $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \ldots, \frac{dC_n}{dx}$, des valeurs déterminées, fonctions de x.

Pour obtenir ces valeurs, ajoutons les équations (5) et (8), après avoir multiplié les premières par les facteurs $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$, et posons généralement

$$(10)\quad \varphi(y)=\lambda_0 y+\lambda_1\frac{dy}{dx}+\ldots+\lambda_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

on aura

$$(11)\quad \varphi(y_1)\frac{dC_1}{dx}+\varphi(y_2)\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\varphi(y_n)\frac{dC_n}{dx}=V.$$

Pour avoir la valeur de $\frac{dC_i}{dx}$, il faut déterminer les fac-

teurs λ de manière que l'on ait

(12) $\varphi(y_1)=0,\ \varphi(y_2)=0,\ \ldots,\ \varphi(y_n)=0$, excepté $\varphi(y_i)=0$,

et l'équation (11) donnera

$$\frac{dC_i}{dx}=\frac{V}{\varphi_i(y_i)}, \tag{13}$$

$\varphi_i(y)$ étant la valeur que prend $\varphi(y)$ lorsque les coefficients λ satisfont aux équations (12). Désignons par c_i une constante arbitraire; on aura, par l'intégration,

$$C_i=c_i+\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_i(y_i)};$$

par conséquent, si l'on pose

$$X=y_1\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_1(y_1)}+y_2\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_2(y_2)}+\ldots+y_n\int_{x_0}^{x}\frac{V\,dx}{\varphi_n(y_n)},$$

l'intégrale générale de l'équation (2) sera

$$y=X+c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n,$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires. On voit qu'elle s'obtient en ajoutant la fonction X à l'intégrale générale de l'équation (3).

Il faut remarquer que le déterminant (9) ne peut jamais être nul. En effet, par hypothèse, l'équation (4) représente l'intégrale générale de l'équation (3), lorsqu'on regarde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ comme des constantes arbitraires; donc les n équations (6) doivent fournir pour $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des valeurs déterminées fonctions de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\ldots$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, ce qui n'aurait pas lieu, si le déterminant en question était nul.

728. Méthode de Cauchy. — La méthode dont nous venons de faire usage, fondée sur la *variation des arbi-*

traires, a une importance considérable dans l'Analyse, et elle nous a fourni une solution très-élégante du problème que nous nous étions proposé ; il ne sera pas inutile cependant de faire connaître ici une autre solution que Cauchy a donnée de la même question.

Il s'agit d'intégrer l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = F(x),$$

dont nous représentons le second membre par $F(x)$, en supposant connue l'intégrale générale $y = Y$ de l'équation

$$(2)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

Les n arbitraires qui figurent dans la fonction Y peuvent être déterminées de manière que l'on ait, pour $x = \alpha$,

$$(3)\qquad Y = 0,\quad \frac{dY}{dx} = 0,\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-2}Y}{dx^{n-2}} = 0 \quad\text{et}\quad \frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} = F(\alpha),$$

et je dis qu'on satisfera à l'équation (1) en posant

$$(4)\qquad y = \int_0^x Y\,d\alpha.$$

En effet, on a, en différentiant cette formule (4) et en représentant par (Y) la valeur de Y pour $\alpha = x$,

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx}\,d\alpha + (Y),$$

ou simplement

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{dx}\,d\alpha,$$

car, les formules (3) ayant lieu quand on remplace x par α, et par suite quand on remplace α par x, la quantité (Y) est identiquement nulle.

Pareillement, les dérivées $\frac{d^2 Y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-2} Y}{dx^{n-2}}$ s'annulant pour $\alpha = x$, on a, par des différentiations successives,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^2 Y}{dx^2}\, d\alpha, \\ \dfrac{d^3 y}{dx^3} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^3 Y}{dx^3}\, d\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \displaystyle\int_0^x \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}\, d\alpha; \end{cases}$$

enfin, une différentiation nouvelle donne

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n}\, d\alpha + \left(\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}\right),$$

$\left(\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}\right)$ étant la valeur que prend $\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}$ pour $\alpha = x$. Il est évident que cette valeur est $F(x)$, puisque, par hypothèse, $\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}$ se réduit à $F(\alpha)$ pour $x = \alpha$; ainsi l'on a

$$(7)\quad \frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n}\, d\alpha + F(x).$$

Substituons maintenant, dans l'équation (1), les valeurs de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ tirées des formules (4), (5), (6) et (7); on aura pour résultat

$$\int_0^x \left(\frac{d^n Y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dY}{dx} + UY\right) d\alpha = 0,$$

ce qui est bien une identité; car le coefficient de $d\alpha$ sous le signe $\int$ est nul par hypothèse.

Nous connaissons donc, par cette méthode, une solu-

tion de l'équation (1); désignons-la par X et posons

$$y = X + z.$$

Si l'on efface les termes qui se détruisent, le résultat de la substitution dans l'équation (1) sera

$$\frac{d^n z}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (2), où la lettre y est remplacée par z. Il s'ensuit que, pour avoir l'intégrale générale de l'équation (1), il suffit de prendre celle de l'équation (2) et d'y ajouter ensuite X.

Réduction d'une équation linéaire à une autre d'ordre inférieur, dans le cas où l'on connaît une ou plusieurs intégrales particulières de l'équation privée de second membre.

729. Posons, comme au n° 727,

$$(1)\qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy,$$

P, ..., T, U étant des fonctions données de x. Nous venons de voir qu'on peut obtenir, par des quadratures, l'intégrale générale de l'équation

$$(2)\qquad \Phi(y) = V,$$

dont le second membre est une fonction donnée de x, quand on connaît l'intégrale générale de l'équation

$$(3)\qquad \Phi(y) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, quand on connaît n intégrales particulières distinctes de cette équation, sans aucune constante arbitraire. Nous nous proposons ici de généraliser ce résultat en démontrant que l'intégra-

tion de l'équation (2) exige seulement l'intégration d'une équation linéaire d'ordre $n - i$, lorsque l'on connaît i intégrales particulières de l'équation (3).

Supposons que l'on connaisse une intégrale particulière y_1 de l'équation (3); on aura une intégrale plus générale en posant

$$(4) \qquad y = C_1 y_1,$$

C_1 étant une arbitraire, et, si l'on regarde C_1 comme variable, l'équation (4) pourra représenter l'intégrale générale de l'équation (2); ce n'est ici que le même changement de variables déjà pratiqué au n° 726. L'équation (4) donne, par la différentiation (n° 64),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = C_1 \dfrac{dy_1}{dx} + y_1 \dfrac{dC_1}{dx}, \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = C_1 \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} + 2 \dfrac{dC_1}{dx} \dfrac{dy_1}{dx} + y_1 \dfrac{d^2 C_1}{dx^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = C_1 \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + \dfrac{n}{1} \dfrac{dC_1}{dx} \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + y_1 \dfrac{d^n C_1}{dx^n}, \end{array} \right.$$

et, comme $\Phi(y_1)$ est nul par hypothèse, la substitution des valeurs (4) et (5) dans l'équation (2) donnera un résultat de la forme

$$(6) \qquad \frac{d^n C_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} C_1}{dx^{n-1}} + \ldots + T_1 \frac{dC_1}{dx} = V_1,$$

$P_1, \ldots, T_1$ et V_1 étant des fonctions connues de x. L'équation (6), d'où l'on doit tirer la valeur de C_1, est linéaire et d'ordre n; mais, comme elle ne renferme que les dérivées de C_1 et non cette fonction elle-même, on l'abaissera à l'ordre $n - 1$ en posant

$$(7) \qquad \frac{dC_1}{dx} = u;$$

elle devient alors

$$(8)\qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + T_1 u = V_1.$$

Si l'on peut trouver l'intégrale générale de l'équation (8), on aura, par l'équation (7), en désignant par c_1 une constante arbitraire,

$$C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} u\,dx;$$

enfin l'équation (4) donnera

$$(9)\qquad y = c_1 y_1 + y_1 \int_{x_0}^{x} u\,dx,$$

qui sera l'intégrale générale de l'équation proposée (2).

Ainsi la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation (3) permet d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation (2), sans que la forme linéaire soit sacrifiée.

730. Supposons que l'on connaisse i intégrales particulières

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_i$$

de l'équation (3). Au moyen de l'intégrale y_1, on ramènera, comme on vient de le voir, l'intégration de l'équation (2) à celle de l'équation (8), que nous représenterons, pour abréger, par

$$(10)\qquad \Psi(u) = V_1,$$

et je dis que l'on connaît $i-1$ intégrales particulières de l'équation

$$(11)\qquad \Psi(u) = 0.$$

En effet, il est évident qu'on passe de l'équation (11) à l'équation (3) par la substitution

$$u = \frac{d\dfrac{y}{y_1}}{dx},$$

et, puisque $y_2, y_3, \ldots, y_{i-1}$ sont des solutions de cette équation (3), l'équation (11) sera satisfaite par l'une quelconque des valeurs suivantes de u :

$$\frac{d\frac{y_2}{y_1}}{dx}, \quad \frac{d\frac{y_3}{y_1}}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d\frac{y_i}{y_1}}{dx}.$$

Ainsi l'on peut appliquer à l'équation (10) tout ce que nous avons dit de l'équation (2); on ramènera la recherche de son intégrale à celle d'une équation linéaire d'ordre $n-2$ telle, que l'équation correspondante sans second membre admettra $i-2$ intégrales particulières connues. Et, en poursuivant de la même manière, on formera une équation linéaire d'ordre $n-i$, dont il suffira de connaître l'intégrale générale pour obtenir celle de la proposée.

731. Remarques. — La connaissance d'une intégrale particulière y_1 de l'équation (2) ramène, comme on l'a vu, l'intégration de cette équation à celle de l'équation (3); en d'autres termes, elle donne le moyen de faire disparaître le second membre, mais non d'abaisser l'ordre de l'équation. Il en résulte que, si l'on connaît i intégrales particulières de la même équation (2), on pourra faire disparaître le second membre et abaisser en outre de $i-1$ unités l'ordre de l'équation; car, l'intégrale y_1 ayant été employée pour l'évanouissement du second membre, on connaîtra $i-1$ intégrales y_2-y_1, $y_3-y_1, \ldots, y_i-y_1$ de l'équation transformée.

Si le rapport de V à U est constant, on a une solution de l'équation (2) en posant $y=\frac{V}{U}$; cette équation est donc immédiatement ramenée à l'équation (3).

Enfin on voit par les développements qui précèdent que les équations linéaires n'admettent pas de solutions

particulières, sans qu'il soit nécessaire, pour cet objet, de recourir à la théorie générale de ces solutions. Nous avons vu effectivement que, si y_1 désigne une solution de l'équation $\Phi(y) = 0$, on peut mettre l'intégrale générale de cette équation sous la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n;$$

y_1 est donc une intégrale particulière. De même, si y_0 désigne une solution de $\Phi(y) = V$, l'intégrale générale de cette équation sera de la forme

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n,$$

en sorte que y_0 est encore une intégrale particulière.

Autre manière d'effectuer la réduction d'une équation linéaire à une équation linéaire d'ordre inférieur.

732. La réduction dont nous nous sommes occupé au n° 730 peut être effectuée d'une autre manière ; c'est ce que nous allons montrer ici, afin de donner un nouvel exemple de la méthode de la variation des arbitraires.

Reprenons l'équation linéaire d'ordre n

$$(1) \qquad \Phi(y) = V,$$

et supposons que l'on connaisse i intégrales particulières de l'équation sans second membre

$$(2) \qquad \Phi(y) = 0.$$

On aura une intégrale particulière plus étendue de l'équation (2) en posant

$$(3) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_i y_i,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_i$ étant des constantes arbitraires, et si l'on regarde ces arbitraires comme des variables, fonctions

de x, l'équation (3) sera susceptible de représenter l'intégrale générale de l'équation (1); on pourra même établir entre les arbitraires $i-1$ relations choisies à volonté. Procédant ici comme au n° 727, nous choisirons les relations dont il s'agit de telle manière que les $i-1$ premières dérivées de y aient les mêmes expressions dans l'hypothèse des arbitraires variables que dans celle des arbitraires constantes. Ainsi nous poserons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_i\frac{dC_i}{dx}=0,\\
&\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{dy_i}{dx}\frac{dC_i}{dx}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^{i-2}y_1}{dx^{i-2}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{i-2}y_2}{dx^{i-2}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{i-2}y_i}{dx^{i-2}}\frac{dC_i}{dx}=0,
\end{aligned}\right.$$

et l'on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_iy_i,\\
&\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\ldots+C_i\frac{dy_i}{dx},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}=C_1\frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}}+C_2\frac{d^{i-1}y_2}{dx^{i-1}}+\ldots+C_i\frac{d^{i-1}y_i}{dx^{i-1}}.
\end{aligned}\right.$$

Posons, en outre,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{i-1}y_2}{dx^{i-1}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{i-1}y_i}{dx^{i-1}}\frac{dC_i}{dx}=z,\\
&\frac{d^{i}y_1}{dx^{i}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{i}y_2}{dx^{i}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{i}y_i}{dx^{i}}\frac{dC_i}{dx}=z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}\frac{dC_i}{dx}=z_{n-i};
\end{aligned}\right.$$

et faisons aussi, pour abréger l'écriture,

$$(7)\qquad \begin{cases} Z = z, \\ Z_1 = \dfrac{dz}{dx} + z_1, \\ Z_2 = \dfrac{d^2 z}{dx^2} + \dfrac{dz_1}{dx} + z_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_{n-i} = \dfrac{d^{n-i} z}{dx^{n-i}} + \dots + \dfrac{dz_{n-i-1}}{dx} + z_{n-i} \end{cases}$$

on aura, en différentiant la dernière des équations (5), et répétant cette différentiation jusqu'à celle de l'ordre $n - i + 1$,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^i y}{dx^i} = C_1 \dfrac{d^i y_1}{dx^i} + C_2 \dfrac{d^i y_2}{dx^i} + \dots + C_i \dfrac{d^i y_i}{dx^i} + Z, \\ \dfrac{d^{i+1} y}{dx^{i+1}} = C_1 \dfrac{d^{i+1} y_1}{dx^{i+1}} + C_2 \dfrac{d^{i+1} y_2}{dx^{i+1}} + \dots + C_i \dfrac{d^{i+1} y_i}{dx^{i+1}} + Z_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = C_1 \dfrac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \dfrac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + C_i \dfrac{d^n y_i}{dx^n} + Z_{n-i}. \end{cases}$$

Substituons maintenant, dans l'équation (1), les valeurs de y et de ses n premières dérivées tirées des formules (5) et (8) : on aura, en remarquant que $y_1, y_2, \dots, y_i$ sont des intégrales particulières de l'équation (2),

$$(9)\qquad Z_{n-i} + P Z_{n-i-1} + \dots + S Z = V.$$

Mais le système composé des équations (4) et de la première équation (6) détermine pour

$$\frac{dC_1}{dx},\quad \frac{dC_2}{dx},\quad \dots,\quad \frac{dC_i}{dx}$$

des valeurs de la forme

$$(10)\qquad \frac{dC_1}{dx} = X_1 z,\quad \frac{dC_2}{dx} = X_2 z,\quad \dots,\quad \frac{dC_i}{dx} = X_i z,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_i$ étant des fonctions données de x, et les $n-i$ dernières équations (6) donnent ensuite pour $z_1, z_2, \ldots, z_{n-i}$ des valeurs telles que

$$(11) \qquad z_1 = \Xi_1 z, \quad z_2 = \Xi_2 z, \quad \ldots, \quad z_{n-i} = \Xi_{n-i} z,$$

$\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{n-i}$ étant également des fonctions données de x. Il en résulte que les quantités désignées par Z_k sont des fonctions linéaires d'ordre k relativement à z et à ses dérivées; l'équation (9), à laquelle nous ramenons la proposée, est donc linéaire comme celle-ci, et d'ordre $n-i$.

L'intégrale générale de l'équation (9) renferme $n-i$ constantes arbitraires; cette intégrale étant supposée connue, on aura, par les équations (10),

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1 z\,dx, \\ C_2 &= c_2 + \int_{x_0}^{x} X_2 z\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_i &= c_i + \int_{x_0}^{x} X_i z\,dx, \end{aligned} \right.$$

$c_1, c_2, \ldots, c_i$ désignant i nouvelles constantes arbitraires. En employant ces valeurs de $C_1, C_2, \ldots, C_i$, l'équation (3) donnera l'intégrale générale de la proposée; elle renferme bien, comme on voit, n constantes arbitraires.

Des équations linéaires du deuxième ordre.

733. Considérons l'équation linéaire du deuxième ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = V,$$

où P, Q, V sont des fonctions données de x. D'après la théorie exposée précédemment (n° 729), si l'on connaît une solution y_1 de l'équation obtenue en remplaçant V par zéro, l'intégration de la proposée ne dépendra que de celle d'une équation linéaire du premier ordre, et, comme une telle équation peut toujours être intégrée, on pourra aussi déterminer l'intégrale générale de l'équation (1). On obtient très-aisément cette intégrale en opérant comme il suit. On a, par hypothèse,

$$(2) \qquad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P\frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0.$$

En retranchant les équations (1) et (2) l'une de l'autre après avoir multiplié la première par y_1 et la seconde par y, il vient

$$\left(y_1\frac{d^2 y}{dx^2} - y\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right) + P\left(y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx}\right) = Vy_1;$$

or, si l'on fait

$$(3) \qquad y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx} = z,$$

on aura

$$y_1\frac{d^2 y}{dx^2} - y\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx};$$

donc

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} + Pz = Vy_1.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$(5) \qquad z = e^{-\int_{x_0}^{x} P\,dx}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} P\,dx}\, Vy_1\,dx\right);$$

l'équation (3) donne ensuite

$$\frac{d\frac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2},$$

d'où, en intégrant,

(6) $$y = Cy_1 + y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{z}{y_1^2}\,dx.$$

Cette expression (6) de y renferme deux constantes arbitraires C, C_1.

734. Il convient d'indiquer ici, d'après Sturm, une propriété des intégrales de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = o.$$

Soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières avec lesquelles on peut composer, comme on sait, l'intégrale générale. On aura, par ce qui précède,

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = C_1 e^{-\int_{x_0}^{x} P\,dx},$$

d'où il suit que la fonction $y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$ a toujours le même signe, et, par conséquent, y_1 et $\frac{dy_1}{dx}$ ou y_2 et $\frac{dy_2}{dx}$ ne peuvent s'annuler pour la même valeur x. Supposons

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} > o;$$

si la fonction y_1 s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$, on aura, pour l'une et l'autre de ces valeurs de x,

$$y_2\frac{dy_1}{dx} < o,$$

et, par conséquent, y_2 et $\frac{dy_1}{dx}$ seront de signes contraires. Soit $b > a$; quand x croît de a à b, $\frac{dy_1}{dx}$ change de signe pour une certaine valeur α de x; donc y_2 doit aussi changer de signe avant que x devienne égal à b. Par conséquent, si la fonction y_2 reste finie, elle s'évanouira pour une valeur de x comprise entre a et b. On voit de la même manière que y_1 s'annule nécessairement, si elle reste continue, pour une valeur de x comprise entre deux valeurs qui annulent y_2.

Il résulte de là que, x croissant, les deux fonctions y_1 et y_2 s'annulent alternativement tant qu'elles restent continues.

Des équations linéaires sans second membre, à coefficients constants.

735. Soit, comme au n° 727,

$$(1)\qquad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy,$$

P, ..., T, U étant des constantes ou des fonctions de x, et posons, en outre,

$$(2)\qquad f(r) = r^n + Pr^{n-1} + \ldots + Tr + U,$$

r étant une indéterminée; si l'on remplace y par l'exponentielle e^{rx}, on aura

$$(3)\qquad \Phi(e^{rx}) = e^{rx} f(r).$$

Cette formule (3) est une identité; différentions-la i fois par rapport à r; il est évident que la dérivée d'ordre i du premier membre sera

$$\frac{d^i\Phi(e^{rx})}{dr^i} = \Phi\left(\frac{d^i e^{rx}}{dr^i}\right) = \Phi(x^i e^{rx}).$$

Quant à la dérivée d'ordre i du second membre de la formule (3), on l'obtiendra par la règle du n° 66, qui sert à différentier les produits; on aura ainsi, en désignant par $f'(r)$, $f''(r)$, ... les dérivées successives du polynôme $f(r)$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x^i e^{rx}) = e^{rx} \Big[& f^{(i)}(r) + \frac{i}{1} x f^{(i-1)}(r) \\ & + \frac{i(i-1)}{1.2} x^2 f^{(i-2)}(r) + \ldots + x^i f(r) \Big]. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, considérons l'équation linéaire d'ordre n sans second membre

$$(5)\qquad \Phi(y) = 0,$$

ainsi que l'équation algébrique correspondante

$$(6)\qquad f(r) = 0,$$

laquelle sera dite l'*équation caractéristique*.

Si l'équation caractéristique admet une racine r_1 indépendante de x, on voit, par la formule (3), que l'équation (5) admettra l'intégrale particulière $e^{r_1 x}$. En outre, si cette racine r_1 est multiple et que μ désigne son degré de multiplicité, elle appartiendra aux équations

$$f'(r) = 0, \quad f''(r) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(\mu-1)}(r) = 0,$$

et, par conséquent, pour les valeurs 1, 2, ..., $(\mu - 1)$ de i, la formule (4) donnera

$$\Phi(x^i e^{r_1 x}) = 0,$$

d'où il suit que l'équation (1) admettra les μ solutions

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \quad \ldots, \quad x^{\mu-1} e^{r_1 x}.$$

Lorsque les coefficients P, ..., T, U de l'équation (5) sont constants, l'équation caractéristique a ses n racines

indépendantes de x, et, en conséquence, on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Si les coefficients de l'équation linéaire d'ordre n sans second membre $\Phi(y) = 0$ sont constants, chaque racine de l'équation caractéristique donne autant d'intégrales particulières qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité, et par conséquent le nombre total de ces intégrales particulières est égal à l'ordre de l'équation différentielle.*

Ce théorème permet de former l'intégrale générale de l'équation différentielle. Si les racines de l'équation caractéristique sont inégales, et qu'on les désigne par r_1, r_2, ..., r_n, l'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

C_1, C_2, ..., C_n étant des constantes arbitraires. Dans le cas général, soient $r_1, r_2, \ldots, r_i$ les racines distinctes de l'équation caractéristique, μ_1, μ_2, ..., μ_i leurs degrés de multiplicité respectifs; l'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} + \ldots + P_i e^{r_i x},$$

P_1, P_2, ..., P_i étant des polynômes en x, à coefficients arbitraires et des degrés respectifs $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, ..., $\mu_i - 1$.

736. Pour que la solution formée comme nous venons de le dire soit effectivement l'intégrale générale de l'équation proposée, il est nécessaire qu'on puisse attribuer aux constantes des valeurs telles que

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$$

prennent, pour $x = x_0$, les valeurs arbitraires

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}.$$

Nous allons montrer que cette condition est remplie, en nous bornant toutefois au cas où l'équation caractéristique n'a pas de racines égales.

Si l'on fait généralement

$$C_i = c_i e^{-r_i x_0},$$

la valeur de y que nous avons obtenue prendra la forme

$$y = c_1 e^{r_1(x-x_0)} + c_2 e^{r_2(x-x_0)} + \ldots + c_n e^{r_n(x-x_0)},$$

et l'on en déduit, par la différentiation,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 r_1 e^{r_1(x-x_0)} + c_2 r_2 e^{r_2(x-x_0)} + \ldots + c_n r_n e^{r_n(x-x_0)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = c_1 r_1^{n-1} e^{r_1(x-x_0)} + \ldots + c_n r_n^{n-1} e^{r_n(x-x_0)}.$$

Pour $x = x_0$, on aura

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_1 + c_2 + \ldots + c_n,\\
y'_0 &= c_1 r_1 + c_2 r_2 + \ldots + c_n r_n,\\
y''_0 &= c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + \ldots + c_n r_n^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_0^{(n-1)} &= c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1} + \ldots + c_n r_n^{n-1},
\end{aligned}$$

et il s'agit de démontrer qu'on peut tirer de ces équations des valeurs finies et déterminées pour $c_1, c_2, \ldots, c_n$, en supposant distinctes les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$. A cet effet, ajoutons les équations précédentes après les avoir multipliées respectivement par les facteurs

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-2},\ 1;$$

on aura

$$\Lambda = c_1\varphi(r_1) + c_2\varphi(r_2) + \ldots + c_n\varphi(r_n),$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y'_0 + \lambda_2 y''_0 + \ldots + \lambda_{n-2} y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)},\\
\varphi(r) &= \lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \ldots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1}.
\end{aligned}$$

Supposons qu'on veuille déterminer c_i; on disposera des facteurs indéterminés λ de manière que l'on ait

$$\varphi(r_1) = 0, \quad \varphi(r_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(r_n) = 0, \quad \text{excepté} \quad \varphi(r_i) = 0,$$

et l'équation précédente donnera

$$c_i = \frac{\Lambda}{\varphi(r_i)}.$$

Les conditions par lesquelles nous déterminons les facteurs λ expriment que l'équation

$$\varphi(r) = 0$$

a pour racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$, excepté r_i. Mais l'équation caractéristique $f(r) = 0$ a ces mêmes racines, r_i comprise. On a donc

$$\varphi(r) = \frac{f(r)}{r - r_i} = \frac{r^n + P r^{n-1} + \ldots + T r + U}{r - r_i};$$

en effectuant la division dans le second membre et égalant ensuite de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de r, on aura

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-2} &= P + r_i,\\
\lambda_{n-3} &= Q + P r_i + r_i^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_0 &= T + \ldots + P r_i^{n-2} + r_i^{n-1},
\end{aligned}$$

équations qui déterminent les facteurs λ.

L'expression de $\varphi(r)$ devient, pour $r = r_i$,

$$\varphi(r_i) = f'(r_i),$$

d'où

$$c_i = \frac{A}{f'(r_i)},$$

ce qui est une valeur déterminée, car l'équation $f(r) = 0$ n'ayant pas de racines multiples, le diviseur $f'(r_i)$ ne peut être nul. Ainsi notre solution de l'équation différentielle proposée satisfait bien à la condition que doit remplir l'intégrale générale.

737. Méthode de d'Alembert. — Nous avons démontré plus haut que chaque racine de l'équation caractéristique fournit autant d'intégrales particulières de l'équation linéaire correspondante qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité. Mais, sans recourir à ce théorème, on peut passer facilement du cas des racines inégales à celui des racines multiples, en faisant usage d'une méthode due à d'Alembert et qui offre de précieuses ressources dans diverses questions d'Analyse. Voici en quoi consiste cette méthode. Soient, comme à l'ordinaire,

$$(1) \qquad \Phi(y) = 0$$

l'équation linéaire proposée et

$$(2) \qquad f(r) = 0$$

l'équation caractéristique. Supposons que cette dernière équation n'ait qu'une seule racine multiple r_1 et que le degré de multiplicité de cette racine soit 2. Représentons par

$$(3) \qquad \Psi(y) = 0$$

l'équation linéaire qui répond à l'équation caractéristique

$$(4) \qquad \frac{(r - r_1 - h)\, f(r)}{r - r_1} = 0,$$

h étant une quantité aussi petite que l'on voudra.

L'équation (4) n'ayant pas de racines multiples, l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(r_1+h)x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Mais on a

$$e^{(r_1+h)x} = e^{r_1 x}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1.2} + \ldots\right),$$

et si l'on fait

$$C_1 + C_2 = D_1, \quad C_2 h = D_2,$$

la valeur de y sera

$$y = e^{r_1 x}\left(D_1 + D_2 x + D_2 h \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right) + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x};$$

D_1 et D_2 sont deux constantes arbitraires qu'il est permis de substituer à C_1 et C_2. Maintenant, si l'on fait décroître h indéfiniment, l'équation (3) coïncidera, à la limite, avec l'équation (1), et en même temps la précédente valeur de y deviendra

$$y = (D_1 + D_2 x) e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

ce qui s'accorde avec le théorème du n° 735.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique de l'équation linéaire $\Phi(y) = 0$ ait trois racines égales à r_1; l'équation (4) aura deux racines égales à r_1 et une racine r_3, égale à $r_1 + h$; alors l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$y = (D_1 + D_2 x) e^{r_1 x} + C_3 e^{(r_1+h)x} + \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Développant e^{hx} en série et posant

$$D_1 + C_3 = E_1, \quad D_2 + C_3 h = E_2, \quad C_3 \frac{h^2}{1.2} = E_3,$$

il viendra

$$y = \left(E_1 + E_2 x + E_3 x^2 + \frac{E_3 h}{3} x^3 + \ldots\right) e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

et, si l'on fait tendre h vers zéro, on aura à la limite

$$y = (E_1 + E_2 x + E_3 x^2) e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

ce qui est l'intégrale générale de la proposée dans le cas d'une racine triple r_1.

En continuant ainsi, on verra que, si μ_1 désigne le degré de multiplicité de la racine r_1, l'intégrale générale prendra la forme

$$y = P_1 e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

P_1 étant un polynôme arbitraire en x, du degré $\mu_1 - 1$; et, en opérant de la même manière sur les autres racines multiples que peut avoir l'équation $f(r) = 0$, on reproduira d'une manière complète le résultat auquel nous sommes parvenu au n° 735.

738. Dans ce qui précède, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature des racines de l'équation caractéristique. Lorsque les coefficients sont réels, deux racines imaginaires conjuguées introduisent dans l'intégrale générale des termes compliqués d'imaginaires, et il est souvent utile de les ramener à la forme réelle.

Soient $r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires conjuguées de l'équation caractéristique. Si ces racines sont simples, elles introduiront dans l'intégrale générale les termes

$$C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x),$$

qu'on peut remplacer par

$$(A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x},$$

en posant

$$A = C_1 + C_2, \quad B = (C_1 - C_2)\sqrt{-1}.$$

On peut aussi poser

$$A = G\cos g, \quad B = -G\sin g,$$

et les deux termes que nous considérons seront remplacés par

$$Ge^{\alpha x}\cos(\beta x + g),$$

G et g étant deux constantes arbitraires.

On voit immédiatement que, si les racines conjuguées r_1, r_2 ont le degré de multiplicité μ, elles introduiront dans l'intégrale générale les termes

$$e^{\alpha x}[G\cos(\beta x + g) + G_1 x\cos(\beta x + g_1) + \ldots \\ + G_{\mu-1}x^{\mu-1}\cos(\beta x + g_{\mu-1})],$$

où $G, G_1, \ldots, G_{\mu-1}, g, g_1, \ldots, g_{\mu-1}$ désignent 2μ constantes arbitraires.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

dont nous nous sommes déjà occupé au n° 703 : l'équation caractéristique est ici $r^2 + n^2 = 0$, et l'on en tire $r = \pm n\sqrt{-1}$; l'intégrale générale sera donc

$$y = A\cos nx + B\sin nx,$$

ou, si l'on veut,

$$y = G\cos(nx + g).$$

739. Le théorème du n° 735 est quelquefois applicable à des équations linéaires dans lesquelles les coefficients ne sont pas tous constants. Nous croyons devoir en présenter un exemple.

Soit l'équation du quatrième ordre

$$\frac{d^4y}{dx^4} - (x+3)\frac{d^3y}{dx^3} + 3(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} - (3x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0;$$

l'équation caractéristique est ici

$$(r-1)^3(r-x) = 0;$$

elle a trois racines égales à 1, et, par conséquent, on satisfera à la proposée en posant

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x.$$

Connaissant trois intégrales particulières, on peut ramener l'équation différentielle au premier ordre, et par conséquent l'intégrer complétement (n° 732). Mais on arrive plus aisément au résultat demandé en employant simplement la solution

$$y = Ce^x.$$

Regardant C comme variable, on trouve cette transformée en C :

$$\frac{d^4 C}{dx^4} + (1 - x)\frac{d^3 C}{dx^3} = 0.$$

Posant

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = u,$$

il vient

$$\frac{du}{dx} + (1 - x)u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u} = (x - 1)dx,$$

d'où

$$u = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2};$$

on a donc

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2},$$

et, en intégrant par la méthode du n° 693,

$$C = c\int_0^x (x - z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz + c_0 + c_1 x + c_2 x^2;$$

l'intégrale de l'équation proposée est ainsi

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)e^x + ce^x\int_0^x (x - z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz,$$

c_0, c_1, c_2, c étant quatre constantes arbitraires.

Des équations linéaires pourvues d'un second membre et à coefficients constants.

740. Pour avoir l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(1)\qquad \Phi(y) = V,$$

il suffit, comme on l'a vu, de connaître une intégrale particulière sans constante arbitraire et d'ajouter cette intégrale à l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$(2)\qquad \Phi(y) = 0.$$

Nous avons démontré au n° 727 qu'on obtient l'intégrale particulière demandée $y = X$ en posant

$$(3)\qquad X = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_2(y_2)} + \ldots + y_n \int_{x_0}^{x} \frac{V\,dx}{\varphi_n(y_n)}.$$

Dans cette formule, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ désignent n intégrales particulières de l'équation (2), et $\varphi_i(y)$ représente la fonction

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \lambda_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

où les coefficients λ sont déterminés de manière que l'on ait

$$\varphi_i(y_1) = 0,\ \varphi_i(y_2) = 0,\ \ldots,\ \varphi_i(y_n) = 0,\ \text{excepté}\ \varphi_i(y_i) = 0.$$

Appliquons ce résultat au cas où, les coefficients de $\Phi(y)$ étant constants, l'équation caractéristique n'a pas de racines égales. On a ici $y_i = e^{r_i x}$ et $\varphi_i(y)$ est le produit de e^{rx} par le polynôme

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \ldots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1},$$

qui doit s'annuler quand on pose $r = r_1, r_2, \ldots, r_n,$

excepté r_i; il résulte de là que, $f(r)$ désignant le premier membre de l'équation caractéristique, on a

$$\varphi_i(y) = e^{rx}\frac{f(r)}{r - r_i},$$

et, pour $y = y_i$ ou $r = r_i$,

$$\varphi_i(y_i) = e^{r_i x} f'(r_i).$$

D'après cela, la formule (3) donnera

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{e^{r_1 x}}{f'(r_1)}\int_{x_0}^{x} e^{-r_1 x}\,V\,dx + \frac{e^{r_2 x}}{f'(r_2)}\int_{x_0}^{x} e^{-r_2 x}\,V\,dx + \ldots \\ &\quad + \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)}\int_{x_0}^{x} e^{-r_n x}\,V\,dx. \end{aligned}\right.$$

Telle est la quantité qu'il faut ajouter à l'intégrale générale de l'équation (2) pour avoir celle de l'équation (3). On obtient exactement la même formule en appliquant la méthode de Cauchy que nous avons fait connaître au n° 728.

Il ne serait pas difficile de déduire de la formule (4) celles qui conviennent aux cas où l'équation caractéristique a des racines multiples; mais nous ne croyons pas utile de développer cette analyse. On résoudra facilement la question, dans chaque cas, en faisant usage de la formule (3).

741. Exemples. — 1° Soit proposé d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

En considérant d'abord l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = 0,$$

on a l'équation caractéristique $f(r) = r^2 - n^2 = 0$, d'où $r = \pm n$; l'intégrale générale est donc

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

Revenons à la proposée; à cause de $f'(r) = 2r$ et de

$$\int e^{-rx} V\, dx = -\frac{e^{-rx} V}{r} + \int \frac{e^{-rx}}{r} \frac{dV}{dx} dx,$$

on a

$$X = -\frac{1}{n^2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{-nx}\, dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{-nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{nx}\, dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

ou, en mettant α au lieu de x sous chaque signe $\int$,

$$X = \frac{1}{2n^2} \int_0^x \frac{\left[e^{\frac{n(x-\alpha)}{2}} - e^{-\frac{n(x-\alpha)}{2}} \right]^2}{\sqrt{1+\alpha^4}} d\alpha;$$

l'intégrale demandée sera

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + X.$$

2° Considérons encore l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2n \frac{dy}{dx} + n^2 y = V.$$

L'équation privée du second membre répond à l'équation caractéristique $(r-n)^2 = 0$, et il en résulte les deux intégrales particulières $y_1 = e^{nx}$, $y_2 = x e^{nx}$; puis, en conservant les notations du n° 740, on a

$$\varphi_1(y_1) = -\frac{e^{nx}}{x}, \quad \varphi_2(y_2) = e^{nx}.$$

Posant donc

$$X = -e^{nx} \int_{x_0}^x V x e^{-nx}\, dx + x e^{nx} \int_{x_0}^x V e^{-nx}\, dx,$$

on aura, pour l'intégrale générale de la proposée,

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{nx} + X,$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

742. Au lieu d'appliquer les formules générales, on peut procéder, dans chaque cas particulier, à une recherche directe, en suivant la méthode par laquelle nous avons établi ces formules. Mais nous devons indiquer deux cas dans lesquels on parvient immédiatement à découvrir l'intégrale particulière nécessaire pour l'évanouissement du second membre de l'équation différentielle.

1° Si le second membre V est une fonction entière

$$V = A_0 x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots + A_{i-1} x + A_i,$$

on posera

$$y = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_{i-1} x + a_i,$$

et, en substituant dans l'équation proposée, on aura $i+1$ équations qui serviront à déterminer les coefficients a_0, $a_1, \ldots, a_i$.

2° Si le second membre V a la forme

$$V = A\cos\mu x + B\sin\mu x \quad \text{ou} \quad V = Ae^{\mu x\sqrt{-1}} + Be^{-\mu x\sqrt{-1}},$$

on posera

$$y = a\cos\mu x + b\sin\mu x \quad \text{ou} \quad y = ae^{\mu x\sqrt{-1}} + be^{-\mu x\sqrt{-1}},$$

et l'on aura deux équations d'où l'on tirera les valeurs de a et de b. Mais il faut remarquer que ces équations peuvent donner pour a et b des valeurs infinies, et, dans ce cas, il est nécessaire de modifier la forme de la valeur de y. L'équation proposée étant $\Phi(y) = V$, on a, quel que soit μ,

$$\Phi(ae^{\pm\mu x\sqrt{-1}}) = ae^{\pm\mu x\sqrt{-1}} f(\pm\mu\sqrt{-1}),$$

d'où, en différentiant par rapport à $\pm\mu\sqrt{-1}$,

$$\varphi\left(axe^{\pm\mu x\sqrt{-1}}\right) = ae^{\pm\mu x\sqrt{-1}}\left[f'\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right) + xf\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right)\right]$$

. . . .

D'après ces formules, si $f\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right)$ n'est pas nulle, on pourra poser $y = ae^{\mu x\sqrt{-1}} + be^{-\mu x\sqrt{-1}}$, ou, ce qui revient au même,

$$y = a\cos\mu x + b\sin\mu x.$$

Si $f\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right)$ est nulle, mais que $f'\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right)$ ne le soit pas, on pourra poser

$$y = x(a\cos\mu x + b\sin\mu x),$$

et ainsi de suite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x;$$

on a ici

$$f\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right) = -\mu^2 + 1, \quad f'\left(\pm\mu\sqrt{-1}\right) = \pm 2\mu\sqrt{-1},$$

et, comme μ doit être égal à 1, on devra poser

$$y = x(a\cos x + b\sin x),$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x(-a\sin x + b\cos x) + (a\cos x + b\sin x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x(a\cos x + b\sin x) + 2(-a\sin x + b\cos x);$$

substituant, on a

$$2(-a\sin x + b\cos x) = \cos x,$$

d'où

$$a = 0, \quad b = \tfrac{1}{2};$$

on a donc l'intégrale particulière $y = \frac{x \sin x}{2}$; et l'intégrale générale est

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{x \sin x}{2}.$$

Sur un cas des équations linéaires réductible à celui des coefficients constants.

743. Les équations linéaires dont il s'agit ici ont la forme suivante,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{ax+b}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{A_i}{(ax+b)^i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}y = V,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a et b sont des constantes, le second membre V étant une fonction quelconque de x.

L'équation précédente peut être transformée en une autre dans laquelle les coefficients sont constants; il suffit pour cela de poser

$$ax + b = e^t$$

et de prendre t pour variable indépendante au lieu de x. On aura effectivement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a^2}{(ax+b)^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

. . . .

En substituant ces valeurs et en multipliant ensuite par $(ax+b)^n$, on obtiendra une transformée linéaire dans laquelle les coefficients seront constants.

Mais il n'est pas nécessaire d'effectuer la transformation dont nous venons de parler pour obtenir l'intégrale de l'équation proposée. Si l'on représente, pour abréger,

par

(1) $$\Phi(y) = V$$

cette équation, il suffira de connaître l'intégrale générale de l'équation

(2) $$\Phi(y) = 0,$$

et l'on y parvient aisément de la manière suivante. Remplaçons y par $(ax+b)^r$ ou par $e^{r\log(ax+b)}$ dans $\Phi(y)$; nous aurons un résultat de la forme

(3) $$\Phi[(ax+b)^r] = (ax+b)^{r-n} f(r),$$

$f(r)$ étant un polynôme entier de degré n. Ensuite, si l'on différentie i fois la formule (3) par rapport à r, on aura

(4) $$\left\{\begin{aligned} &\Phi[(ax+b)^r \log^i(ax+b)] = (ax+b)^{r-n} \\ &\quad\times\left[f^i(r) + \frac{i}{1}\log(ax+b) f^{i-1}(r) + \ldots + \log^i(ax+b) f(r)\right], \end{aligned}\right.$$

et il résulte des formules (3) et (4) qu'à une racine r_1 de l'équation *caractéristique*

$$f(r) = 0,$$

ayant un degré de multiplicité égal à μ, répondent μ intégrales particulières de l'équation (2), savoir :

$$\begin{gathered} (ax+b)^{r_1}, \\ (ax+b)^{r_1}\log(ax+b), \\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (ax+b)^{r_1}\log^{\mu-1}(ax+b). \end{gathered}$$

Il est bien entendu que, si r_1 est imaginaire, $(ax+b)^{r_1}$ représente l'expression $e^{r_1\log(ax+b)}$.

On connaîtra donc de cette manière n intégrales particulières de l'équation (2), et l'on en déduira, comme on l'a vu précédemment, l'intégrale générale de l'équation (1).

744. Exemple. — Proposons-nous d'intégrer l'équation du deuxième ordre

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (2n - 1) x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0,$$

qui rentre dans la classe de celles dont nous venons de nous occuper. En posant $y = x^r$ et supprimant le facteur x^r, on formera l'équation caractéristique

$$r(r - 1) - (2n - 1) r + n^2 = 0$$

ou

$$(r - n)^2 = 0.$$

Les deux racines sont égales à n; on a donc les deux intégrales particulières

$$x^n, \quad x^n \log x,$$

et, par conséquent, l'intégrale générale de la proposée est

$$y = x^n (C + C' \log x),$$

C et C' désignant des constantes arbitraires.

Des systèmes d'équations linéaires simultanées.

745. L'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles simultanées peut être ramenée, par l'élimination (n° 627), à l'intégration d'une ou de plusieurs équations différentielles qui ne renferment chacune que deux variables. Il est évident que ces dernières équations seront linéaires si les équations du système proposé sont elles-mêmes linéaires; nous présenterons deux exemples de cette méthode.

Soient, en premier lieu, les deux équations simultanées

$$\frac{dy}{dx} - 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

On tire de la seconde

$$y = \frac{dz}{dx} + z,$$

d'où, par la différentiation,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx};$$

substituant ces valeurs dans la première équation, il vient

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

Cette équation est linéaire, à coefficients constants, et l'équation caractéristique qui lui correspond est

$$(r+2)^2 = 0;$$

son intégrale générale est donc, en désignant par C_1, C_2 deux constantes,

$$z = (C_1 + C_2 x)e^{-2x},$$

et l'on a ensuite

$$y = [C_2 - C_1 - C_2 x]e^{-2x}.$$

746. Proposons-nous, en second lieu, d'intégrer les deux équations simultanées

$$2\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Résolvons ces équations par rapport à y et à $\frac{dy}{dt}$; on aura les deux suivantes :

$$11y = 2\frac{d^2 x}{dt^2} - 11\frac{dx}{dt} + 14x + 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

$$11\frac{dy}{dt} = 9\frac{d^2 x}{dt^2} - 44\frac{dx}{dt} + 52x + 9\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

En différentiant la première de ces équations et en retran-

chant ensuite du résultat la deuxième équation, il viendra

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10\frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 26x = \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Le premier membre $f(r)$ de l'équation caractéristique est ici

$$f(r) = r^3 - 10r^2 + 29r - 26,$$

d'où

$$f'(r) = 3r^2 - 20r + 29;$$

d'ailleurs on a, quelle que soit la fonction V,

$$\int e^{-rt}\mathrm{V}\,dt = -\frac{1}{r}e^{-rt}\mathrm{V} + \frac{1}{r}\int e^{-rt}\frac{d\mathrm{V}}{dt}\,dt,$$

et l'on reconnaît aisément qu'on obtiendra une intégrale particulière de l'équation en x en faisant la somme des valeurs que prend l'expression

$$\frac{9-2r}{2r(r^2-8r+13)}e^{rt}\int_0^t \frac{e^{-rt}dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2(r^2-8r+13)}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

quand on substitue à r les trois racines 2, $4+\sqrt{3}$, $4-\sqrt{3}$ de l'équation caractéristique. On aura ensuite l'intégrale générale en ajoutant la somme

$$\mathrm{C}_1e^{2t} + \mathrm{C}_2e^{(4+\sqrt{3})t} + \mathrm{C}_3e^{(4-\sqrt{3})t},$$

où C_1, C_2, C_3 désignent des constantes arbitraires. La valeur de x étant connue, on aura celle de y par l'une des équations écrites plus haut.

747. Toutes les équations différentielles qui n'ont pas la forme linéaire peuvent y être ramenées par l'introduction de variables nouvelles. Nous allons en donner un exemple. Considérons les trois équations différentielles contenues dans la formule

$$(1)\qquad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x},$$

Si l'on introduit une variable nouvelle t dont la différentielle soit égale à chacun des rapports de la formule précédente, on aura les quatre équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=u,\quad \frac{du}{dt}=x,$$

d'où l'on tire, en prenant dt pour la différentielle constante,

$$(3)\qquad y=\frac{dx}{dt},\quad z=\frac{d^2x}{dt^2},\quad u=\frac{d^3x}{dt^3},$$

puis

$$(4)\qquad \frac{d^4x}{dt^4}-x=0.$$

L'équation caractéristique qui répond à l'équation (4) est

$$r^4-1=0$$

et l'on en tire

$$r=\pm 1,\quad r=\pm\sqrt{-1}.$$

Les racines $\pm\sqrt{-1}$ introduiront dans l'intégrale générale de l'équation (4) la partie $C\cos(t-t_0)$, C et t_0 étant deux arbitraires; quant à la partie introduite par les racines ± 1, on peut la représenter par $Ae^{t-t_0}+Be^{-(t-t_0)}$, A et B étant de nouvelles arbitraires. Mais la variable t n'est définie que par sa différentielle, et l'on peut écrire t au lieu de $t-t_0$; on aura donc, en remarquant que y, z, u sont déterminés par les équations (3),

$$\begin{aligned} x&=Ae^t+Be^{-t}+C\cos t,\\ y&=Ae^t-Be^{-t}-C\sin t,\\ z&=Ae^t+Be^{-t}-C\cos t,\\ u&=Ae^t-Be^{-t}+C\sin t. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$4C^2=\alpha,\quad 16AB=\beta,\quad \log 4A=\gamma$$

on tirera des équations précédentes

$$\alpha = (x - z)^2 + (y - u)^2,$$
$$\beta = (x + z)^2 - (y + u)^2,$$
$$\gamma = \log(x + y + z + u) + \operatorname{arc\,tang} \frac{y - u}{x - z};$$

ces équations, où α, β, γ désignent trois constantes arbitraires, représentent les trois intégrales du système proposé.

Méthode de d'Alembert pour ramener aux equations à deux variables les systèmes d'équations linéaires du premier ordre.

748. On doit à d'Alembert une méthode remarquable pour ramener à des équations du premier ordre, à deux variables, un système quelconque d'équations différentielles linéaires simultanées. Nous supposerons que les équations du système proposé aient été réduites au premier ordre, en introduisant, s'il est nécessaire, de nouvelles variables, comme nous l'avons expliqué au n° 615.

Cas de deux équations. — Soient les équations linéaires

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz = V, \\ \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V', \end{cases}$$

dans lesquelles P, Q, V, P', Q', V' sont des fonctions données de la variable indépendante x. En ajoutant ces équations après avoir multiplié la seconde par un facteur indéterminé λ, on a

$$(2)\quad \left(\frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx}\right) + (P + \lambda P')y + (Q + \lambda Q')z = V + \lambda V'.$$

Désignons par t une nouvelle variable, et posons

$$(3) \qquad y + \lambda z = t,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} + \lambda \frac{dz}{dx} + z\frac{d\lambda}{dx} = \frac{dt}{dx}.$$

Si l'on remplace, dans l'équation (2), y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs tirées des formules (3) et (4), il viendra

$$\frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t - z\left[\frac{d\lambda}{dx} + (P + \lambda P')\lambda - (Q + \lambda Q')\right] = V + \lambda V'.$$

On peut disposer du facteur indéterminé λ, de manière que z disparaisse de cette équation, c'est-à-dire de manière que l'on ait

$$(5) \qquad \frac{d\lambda}{dx} + P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0,$$

et l'équation en t devient alors

$$(6) \qquad \frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t = V + \lambda V'.$$

L'équation (6) est linéaire, et l'on en tire, par l'intégration,

$$(7) \qquad t = e^{-\int_{x_0}^{x}(P+\lambda P')dx}\left[C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x}(P+\lambda P')dx}(V + \lambda V')dx\right],$$

ou, pour abréger,

$$(8) \qquad t = F(x, \lambda, C),$$

C étant une constante arbitraire.

L'équation (5), dont dépend λ, n'est pas linéaire, mais il n'est pas nécessaire d'avoir son intégrale générale; deux valeurs particulières λ_1, λ_2 suffisent. Effectivement, les valeurs de t qui répondent à ces valeurs de λ sont

$y + \lambda_1 z$, $y + \lambda_2 z$; l'équation (8) donnera donc, en écrivant successivement C_1, C_2 au lieu de C,

$$(9)\qquad \begin{cases} y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1), \\ y + \lambda_2 z = F(x, \lambda_2, C_2). \end{cases}$$

Chacune des équations (10) est une intégrale du système proposé.

749. La méthode de d'Alembert fait connaître les intégrales des équations différentielles linéaires, lorsque les coefficients sont constants.

En effet, supposons P, Q, P', Q' constants. Si les racines de l'équation

$$(10)\qquad P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0$$

sont inégales, et qu'on les désigne par λ_1, λ_2, on aura les deux solutions demandées de l'équation (5) en posant successivement

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2;$$

on a ici

$$t = e^{-(P + \lambda P')x}\left[C + \int_{x_0}^{x} e^{(P + \lambda P')x}(V + \lambda V')\,dx\right],$$

et les équations (9) deviendront

$$(11)\qquad \begin{cases} y + \lambda_1 z = e^{-(P + \lambda_1 P')x}\left[C_1 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{(P + \lambda_1 P')x}(V + \lambda_1 V')\,dx\right], \\ y + \lambda_2 z = e^{-(P + \lambda_2 P')x}\left[C_2 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{(P + \lambda_2 P')x}(V + \lambda_2 V')\,dx\right]. \end{cases}$$

Lorsque Q est nul, l'une des racines λ_1, λ_2 est nulle; dans ce cas, l'une des équations (11) est l'intégrale de la première des équations proposées, laquelle ne renferme pas z. Lorsque $P' = 0$, l'une des racines de l'équation (10) est infinie; ce cas est analogue à celui de $Q = 0$; la

deuxième des équations proposées ne renferme pas y, et elle détermine z en fonction de x; y est donné ensuite par l'intégration de la première équation.

Si les deux racines de l'équation (10) sont égales entre elles, soit λ_1 leur valeur; l'équation (5) aura la forme

$$\frac{d\lambda}{dx} + P'(\lambda - \lambda_1)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} + P'\,dx = 0,$$

et l'on en tire, par l'intégration,

$$-\frac{1}{\lambda - \lambda_1} + P'x = G, \quad \text{d'où} \quad \lambda - \lambda_1 = \frac{1}{P'x - G},$$

G étant une constante arbitraire. Il suffira de donner à G deux valeurs particulières pour avoir les deux valeurs de λ qui nous sont nécessaires; en faisant $G = \infty$, puis $G = 0$, on a

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_1 + \frac{1}{P'x},$$

et les valeurs correspondantes de $e^{-\int_{x_0}^{x}(P+\lambda P')\,dx}$ sont

$$e^{-(P+\lambda_1 P')x}, \quad \frac{1}{x}e^{-(P+\lambda_1 P')x}.$$

750. Il faut remarquer que les formules relatives au cas particulier de $\lambda_2 = \lambda_1$ peuvent être tirées facilement des formules (11), qui se rapportent au cas général. Effectivement, l'égalité des racines λ cessera d'avoir lieu si l'on modifie convenablement les coefficients; il suffira de multiplier cette équation par $\frac{\lambda - \lambda_1 - h}{\lambda - \lambda_1}$; rien n'empêche d'admettre que P et P' ne sont pas changés, et que la modification porte seulement sur les coefficients Q et Q', qui ne figurent pas dans nos formules. Cela étant, les

intégrales (11) pourront être représentées par

$$y+\lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1),$$
$$y+(\lambda_1+h)z = F(x, \lambda_1+h, C_1+hC_2),$$

en écrivant C_1+hC_2 au lieu de C_2. La seconde équation peut être remplacée par

$$z = \frac{F(x, \lambda_1+h, C_1+hC_2) - F(x, \lambda_1, C_1)}{h},$$

et, à la limite, pour $h=0$, elle se réduit à

$$z = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial C_1}.$$

751. Exemple. — On demande d'intégrer les deux équations simultanées déjà considérées au n° 745 :

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

En appliquant la méthode de d'Alembert, on a

$$\frac{dt}{dx} + (3-\lambda)t = 0$$

et

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda-1)^2 = 0.$$

On tire de là

$$\frac{d\lambda}{(\lambda-1)^2} - dx = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda-1} + x = G, \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 + \frac{1}{G-x}.$$

On peut donc faire ici

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{1}{x}.$$

Soient t_1, t_2 les valeurs de t qui répondent à ces valeurs

de λ, on aura

$$\frac{dt_1}{dx} + 2t_1 = 0, \quad \frac{dt_2}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right) t_2 = 0,$$

d'où

$$y + z = C_1 e^{-2x}, \quad y + z - \frac{z}{x} = C_2 \frac{e^{-2x}}{x}.$$

752. Cas d'un nombre quelconque d'équations. — La méthode de d'Alembert est applicable à un système quelconque d'équations différentielles linéaires.

Soient les n équations linéaires du premier ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \ldots + P_n^{(1)} x_n = V_1,\\ &\frac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \ldots + P_n^{(2)} x_n = V_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \ldots + P_n^{(n)} x_n = V_n,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles les coefficients $P_i^{(j)}$ et les seconds membres V_j sont des fonctions données de la variable indépendante x. Ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par les facteurs indéterminés

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, 1;$$

faisons ensuite

$$(2)\qquad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n = t,$$

puis

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 P_1^{(1)} + \lambda_2 P_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-1} P_1^{(n-1)} + P_1^{(n)} = \varphi_1,\\ &\lambda_1 P_2^{(1)} + \lambda_2 P_2^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-1} P_2^{(n-1)} + P_2^{(n)} = \varphi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\lambda_1 P_n^{(1)} + \lambda_2 P_n^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-1} P_n^{(n-1)} + P_n^{(n)} = \varphi_n\end{aligned}\right.$$

et

$$(4)\qquad \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_{n-1} V_{n-1} + V_n = V,$$

on aura

$$\frac{dt}{dx} + \left(\mathfrak{P}_1 - \frac{d\lambda_1}{dx}\right)x_1 + \ldots + \left(\mathfrak{P}_{n-1} - \frac{d\lambda_{n-1}}{dx}\right)x_{n-1} + \mathfrak{P}_n x_n = \mathfrak{V}.$$

Remplaçons x_n par sa valeur tirée de la formule (2), et profitons ensuite de l'indétermination des facteurs λ, pour faire disparaître les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, l'équation précédente se réduira à la suivante,

$$(5)\qquad \frac{dt}{dx} + \mathfrak{P}_n t = \mathfrak{V},$$

et l'on aura, pour déterminer les facteurs λ, les $n-1$ équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\lambda_1}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_1 - \mathfrak{P}_1 = 0, \\ \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_2 - \mathfrak{P}_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dx} + \mathfrak{P}_n \lambda_{n-1} - \mathfrak{P}_{n-1} = 0. \end{array}\right.$$

L'équation (5) est linéaire, et l'on en tire

$$(7)\qquad t = e^{-\int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}_n dx}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}_n dx}\, \mathfrak{V}\, dx\right),$$

C étant une constante arbitraire.

Les $n-1$ équations (6) ne sont pas linéaires; mais il suffit, pour notre objet, de connaître n systèmes de valeurs des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, satisfaisant à ces équations. Effectivement, désignons généralement par

$$\lambda_1^{(i)},\ \lambda_2^{(i)},\ \ldots,\ \lambda_{n-1}^{(i)}$$

l'un quelconque des n systèmes dont nous venons de

parler, l'indice supérieur i variant de 1 à n. Désignons aussi par $t^{(i)}$ la valeur de t que donne l'équation (7), lorsqu'on attribue aux facteurs λ les valeurs $\lambda^{(i)}$ et que l'on écrit C_i au lieu de C, on aura les n intégrales suivantes des équations différentielles proposées :

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda_1^{(1)} x_1 + \lambda_2^{(1)} x_2 + \ldots + \lambda_{n-1}^{(1)} x_{n-1} + x_n = t^{(1)}, \\ \lambda_1^{(2)} x_1 + \lambda_2^{(2)} x_2 + \ldots + \lambda_{n-1}^{(2)} x_{n-1} + x_n = t^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1^{(n)} x_1 + \lambda_2^{(n)} x_2 + \ldots + \lambda_{n-1}^{(n)} x_{n-1} + x_n = t^{(n)}. \end{cases}$$

De ces équations (8) on tire, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des valeurs de la forme

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = T_1^{(1)} t^{(1)} + T_1^{(2)} t^{(2)} + \ldots + T_1^{(n)} t^{(n)}, \\ x_2 = T_2^{(1)} t^{(1)} + T_2^{(2)} t^{(2)} + \ldots + T_2^{(n)} t^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = T_n^{(1)} t^{(1)} + T_n^{(2)} t^{(2)} + \ldots + T_n^{(n)} t^{(n)}, \end{cases}$$

les coefficients T étant des fonctions des λ.

Soient X_i la valeur que prend x_i quand on donne la valeur zéro aux constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$; z_i la valeur que prend la même fonction x_i quand on suppose nuls les seconds membres $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des équations proposées; il est évident que les équations (9) deviendront

$$x_1 = X_1 + z_1, \quad x_2 = X_2 + z_2, \quad \ldots, \quad x_n = X_n + z_n,$$

ce qui exprime la proposition suivante :

Les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui constituent le système intégral du système différentiel (1) *peuvent être obtenues en ajoutant les valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, qui constituent une première solution sans constantes arbitraires, aux valeurs respectives de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui*

constituent le système intégral du système (1), *après la suppression des seconds membres.*

753. Lorsque les coefficients des équations proposées sont constants, il existe en général n systèmes de valeurs des indéterminées λ, qui se réduisent à des constantes. En effet, supposons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ constantes; les équations (6) deviendront

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\lambda_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{\mathfrak{P}_{n-1}}{\lambda_{n-1}} = \frac{\mathfrak{P}_n}{1}.$$

Si donc on désigne par ρ la valeur des rapports contenus dans cette formule, on aura, en remettant au lieu de $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ leurs valeurs (3),

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} (P_1^{(1)} - \rho)\lambda_1 + P_1^{(2)}\lambda_2 + \ldots + P_1^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_1^{(n)} = 0, \\ P_2^{(1)}\lambda_1 + (P_2^{(2)} - \rho)\lambda_2 + \ldots + P_2^{(n-1)}\lambda_{n-1} + P_2^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(1)}\lambda_1 + P_n^{(2)}\lambda_2 + \ldots + P_n^{(n-1)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \rho) = 0. \end{array}\right.$$

L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ entre ces équations conduit à une équation finale

$$(11)\qquad F(\rho) = 0$$

du degré n par rapport à ρ, et dont le premier membre n'est autre chose que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_1^{(1)} - \rho & P_1^{(2)} & \ldots & P_1^{(n-1)} & P_1^{(n)} \\ P_2^{(1)} & P_2^{(2)} - \rho & \ldots & P_2^{(n-1)} & P_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ P_n^{(1)} & P_n^{(2)} & \ldots & P_n^{(n-1)} & P_n^{(n)} - \rho \end{vmatrix}.$$

A chaque racine ρ de l'équation (11) répondent des valeurs déterminées de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ fournies par $n-1$ des n équations (10). Si donc les racines de l'équation (11) sont inégales, on connaîtra par ce moyen les systèmes de facteurs λ qui nous sont nécessaires; la for-

mule (7), qui détermine les seconds membres des intégrales (8), devient ici

$$t = Ce^{-\rho x} + e^{-\rho x}\int_{x_0}^{x} e^{\rho x}\varphi\,dx.$$

Lorsque l'équation (11) a des racines égales, la méthode précédente ne donne pas n intégrales distinctes; mais on peut employer, pour compléter le nombre des intégrales, un procédé analogue à celui dont nous avons fait usage dans le cas de deux équations.

Intégration d'un système d'équations pourvues de seconds membres, dans le cas où l'on connaît les intégrales des mêmes équations privées de seconds membres.

754. Les propriétés établies aux nos 723 et suivants à l'égard des équations linéaires à deux variables sans seconds membres s'étendent d'elles-mêmes aux systèmes formés d'un nombre quelconque d'équations. En outre, quand on connaît les intégrales d'un système d'équations linéaires sans seconds membres, il est facile d'en conclure les intégrales des mêmes équations différentielles pourvues de seconds membres, soit par la méthode de Cauchy (no 728), soit par la méthode de la variation des arbitraires. Nous ferons usage de cette dernière méthode.

Considérons, comme au no 752, les n équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)}x_1 + P_2^{(1)}x_2 + \ldots + P_n^{(1)}x_n = V_1, \\ \dfrac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)}x_1 + P_2^{(2)}x_2 + \ldots + P_n^{(2)}x_n = V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)}x_1 + P_2^{(n)}x_2 + \ldots + P_n^{(n)}x_n = V_n, \end{array}\right.$$

et supposons que l'on connaisse n systèmes d'intégrales particulières relatives au cas où les seconds membres sont nuls, savoir

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}, \end{array}$$

il est évident qu'on satisfera aux mêmes équations sans seconds membres en posant

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)} + \ldots + C_n x_1^{(n)}, \\ x_2 = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)} + \ldots + C_n x_2^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = C_1 x_n^{(1)} + C_2 x_n^{(2)} + \ldots + C_n x_n^{(n)}, \end{cases}$$

et, si l'on regarde les arbitraires C comme variables, on pourra considérer les équations (2) comme représentant les intégrales du système (1); cette manière de procéder n'est autre chose qu'un changement de variables, comme nous l'avons déjà remarqué.

La substitution des valeurs (2) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans les équations (1) donnera, après les réductions qui résultent de notre hypothèse,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_1^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + x_1^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_1, \\ x_2^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_2^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + x_2^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n^{(1)} \dfrac{dC_1}{dx} + x_n^{(2)} \dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + x_n^{(n)} \dfrac{dC_n}{dx} = V_n. \end{cases}$$

Ces équations donneront pour $\dfrac{dC_1}{dx}, \dfrac{dC_2}{dx}, \ldots$ des valeurs déterminées tant que les équations (2) seront,

dans l'hypothèse des arbitraires constantes, les intégrales générales des équations (1) privées de leurs seconds membres. On aura donc

$$(4) \qquad \frac{dC_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dC_n}{dx} = X_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions connues de x. On tire de là

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} X_1 dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n = c_n + \int_{x_0}^{x} X_n dx, \end{array} \right.$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires.

Autre méthode pour la recherche des intégrales dans le cas des coefficients constants.

755. Au lieu d'employer la méthode de d'Alembert, dans le cas des coefficients constants, on peut procéder à l'intégration en appliquant le procédé qui nous a déjà servi dans le cas d'une équation linéaire à deux variables.

Soient les n équations sans seconds membres

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dx} + P_1^{(1)} x_1 + P_2^{(1)} x_2 + \ldots + P_n^{(1)} x_n = 0, \\ \frac{dx_2}{dx} + P_1^{(2)} x_1 + P_2^{(2)} x_2 + \ldots + P_n^{(2)} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \frac{dx_n}{dx} + P_1^{(n)} x_1 + P_2^{(n)} x_2 + \ldots + P_n^{(n)} x_n = 0, \end{array} \right.$$

dans lesquelles les coefficients P sont constants. Posons

$$(2) \quad x_1 = \lambda_1 e^{-\rho x}, \quad x_2 = \lambda_2 e^{-\rho x}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \lambda_{n-1} e^{-\rho x}, \quad x_n = e^{-\rho x},$$

et substituons ces valeurs dans les équations (1) ; on aura, après la suppression du facteur $e^{-\rho x}$,

$$(3)\quad \begin{cases} (P_1^{(1)} - \rho)\lambda_1 + P_2^{(1)}\lambda_2 + \ldots + P_{n-1}^{(1)}\lambda_{n-1} + P_n^{(1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_1^{(n)}\lambda_1 + P_2^{(n)}\lambda_2 + \ldots + P_{n-1}^{(n)}\lambda_{n-1} + (P_n^{(n)} - \rho) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont de même forme que les équations (10) du n° 753, et elles conduisent à la même équation en ρ du degré n, par l'élimination des indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; à chaque racine ρ de cette équation

$$(4)\qquad F(\rho) = 0$$

répondront en général des valeurs déterminées de λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Si l'équation (4) a n racines distinctes, on formera de cette manière n systèmes d'intégrales particulières au moyen des équations (2). Soient

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$$

les n racines ρ,

$$\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \ldots, \lambda_i^{(n)}$$

les valeurs correspondantes de λ_i et

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

n constantes arbitraires ; les intégrales du système proposé seront

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = C_1\lambda_1^{(1)} e^{-\rho_1 x} + C_2\lambda_1^{(2)} e^{-\rho_2 x} + \ldots + C_n\lambda_1^{(n)} e^{-\rho_n x}, \\ x_2 = C_1\lambda_2^{(1)} e^{-\rho_1 x} + C_2\lambda_2^{(2)} e^{-\rho_2 x} + \ldots + C_n\lambda_2^{(n)} e^{-\rho_n x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = C_1 e^{-\rho_1 x} + C_2 e^{-\rho_2 x} + \ldots + C_n e^{-\rho_n x}. \end{cases}$$

Il serait aisé de trouver, dans chaque cas, les modifica-

tions que doivent subir ces formules lorsque quelques-unes des racines ρ deviennent égales entre elles; ce que nous avons dit au nº 750 nous paraît suffisant, et nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

Sur une classe d'équations différentielles linéaires.

756. Nous croyons devoir faire connaître, en terminant ce Chapitre, un résultat remarquable obtenu par Jacobi, et qui se rapporte à la théorie qui nous occupe.

Considérons un système de n équations différentielles quelconques entre une variable indépendante x et n variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Représentons par x'_i la dérivée $\frac{dx_i}{dx}$ et par

$$(1)\qquad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad \ldots,\quad F_n = 0$$

les équations différentielles proposées $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des fonctions quelconques de x, de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des dérivées $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Supposons que l'on connaisse les intégrales générales du système (1) et que ces intégrales soient résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; représentons-les par

$$(2)\qquad x_1 = X_1,\quad x_2 = X_2,\quad \ldots,\quad x_n = X_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions de x et de n constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si l'on porte les valeurs (2) dans les équations (1), celles-ci deviendront identiques, et l'on en conclura de nouvelles identités par la différentiation relative aux arbitraires. Différentions, par exemple, l'équation

$$F_i = 0$$

par rapport à l'arbitraire a_μ; on aura

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_\mu}+\frac{\partial F_i}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial a_\mu}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial a_\mu}+\frac{\partial F_i}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial a_\mu}\right)=0,$$

équation identique après la substitution des valeurs (2).

Or $\frac{\partial x'_k}{\partial a_\mu}$ est égale à $\frac{\partial \frac{\partial x_k}{\partial a_\mu}}{\partial x}$; si donc on représente par

$$U_i^{(k)},\quad V_i^{(k)}$$

les valeurs que prennent $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x'_k}$ après la substitution des valeurs (2), nous aurons l'identité

$$(3)\quad \left(U_i^{(1)}\frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}+V_i^{(1)}\frac{\partial \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right)+\ldots+\left(U_i^{(n)}\frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}+V_i^{(n)}\frac{\partial \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu}}{\partial x}\right)=0.$$

Cela posé, considérons les n équations linéaires simultanées

$$(4)\quad \begin{cases} \left(U_1^{(1)}z_1+V_1^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\ldots+\left(U_1^{(n)}z_n+V_1^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0,\\ \left(U_2^{(1)}z_1+V_2^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\ldots+\left(U_2^{(n)}z_n+V_2^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \left(U_n^{(1)}z_1+V_n^{(1)}\frac{dz_1}{dx}\right)+\ldots+\left(U_n^{(n)}z_n+V_n^{(n)}\frac{dz_n}{dx}\right)=0, \end{cases}$$

dans lesquelles $z_1, z_2, \ldots, z_n$ désignent des fonctions inconnues, et où les quantités U, V sont, comme on vient de le voir, des fonctions données de x et de n constantes a_1, $a_2, \ldots, a_n$. A cause de l'identité (3), qui a lieu quel que soit i, les équations (4) sont satisfaites quand on pose

$$z_1=\frac{\partial X_1}{\partial a_\mu},\quad z_2=\frac{\partial X_2}{\partial a_\mu},\quad \ldots,\quad z_n=\frac{\partial X_n}{\partial a_\mu};$$

donc les intégrales générales du système (4) seront

$$(5)\quad \begin{cases} z_1 = C_1 \dfrac{\partial X_1}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial X_1}{\partial a_2} + \ldots + C_n \dfrac{\partial X_1}{\partial a_n}, \\ z_2 = C_1 \dfrac{\partial X_2}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial X_2}{\partial a_2} + \ldots + C_n \dfrac{\partial X_2}{\partial a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = C_1 \dfrac{\partial X_n}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial X_n}{\partial a_2} + \ldots + C_n \dfrac{\partial X_n}{\partial a_n}, \end{cases}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant n constantes arbitraires.

Ainsi tout système d'équations différentielles simultanées dont les intégrales sont connues conduit à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables, dont les intégrales s'obtiennent par de simples différentiations.

CHAPITRE X.

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES SÉRIES OU PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES.

Emploi des formules de Taylor et de Maclaurin.

757. L'Analyse mathématique n'étant en possession d'aucune méthode générale pour l'intégration des équations différentielles, on a dû recourir, dans les applications, aux méthodes d'approximation fondées sur l'emploi des séries. Mais ces méthodes elles-mêmes sont difficilement praticables dans le cas des équations non linéaires, à moins qu'on ne puisse se borner à un très-petit nombre de termes. Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de donner une idée des procédés en usage pour effectuer l'intégration par les séries.

Celui qui s'offre le premier consiste dans l'emploi des formules de Taylor et de Maclaurin. Nous avons déjà fait usage de la formule de Taylor pour établir l'existence des équations intégrales ; on peut lui substituer la formule de Maclaurin, qui conduit souvent à des résultats plus simples, mais qui ne fait pas toujours connaître l'intégrale générale demandée. C'est ce que l'on va voir dans l'exemple suivant.

758. Considérons l'équation du deuxième ordre

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0,$$

qu'on rencontre dans diverses questions de Physique ma-

thématique, et dans laquelle n et m^2 désignent deux nombres réels donnés positifs ou négatifs.

Multiplions l'équation (1) par x et différentions ensuite $\mu - 1$ fois; on aura

$$(2)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} - m^2xy = 0,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \left[x\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} + (\mu-1)\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right] + 2n\frac{d^\mu y}{dx^\mu} \\ \quad - m^2\left[x\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + (\mu-1)\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}\right] = 0. \end{cases}$$

Pour $x = 0$, les équations (2) et (3) donnent

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = 0,\quad (2n + \mu - 1)\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = (\mu - 1)m^2\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}};$$

dans le cas de $\mu = 2$, cette dernière équation est

$$(5)\qquad (2n+1)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y.$$

On voit que, si $2n$ n'est pas un entier négatif, les dérivées de y des ordres impairs sont nulles, et que les dérivées des ordres pairs sont données par la formule

$$\frac{d^{2i}y}{dx^{2i}} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2i-1)}m^{2i}y.$$

Si donc on désigne par C la valeur de y qui répond à $x = 0$, la formule de Maclaurin donnera cette intégrale particulière de l'équation (1)

$$(6)\qquad \begin{cases} y = C\left[1 + \frac{m^2x^2}{2.(2n+1)} + \frac{m^4x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)}\right. \\ \qquad \left. + \frac{m^6x^6}{2.4.6(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

La formule (6) est illusoire lorsque $2n$ est égal à un

entier impair négatif; mais, ce cas étant mis de côté, la série qui figure dans le second membre est convergente quel que soit x, car le rapport du terme de rang $i+1$ au terme de rang i, savoir

$$\frac{m^2 x^2}{2i(2n-2i-1)},$$

tend vers zéro, quand i augmente indéfiniment.

759. Examinons le cas où $2n$ est égal à un entier négatif. Si cet entier est impair, on voit, par la seconde des formules (4), que les dérivées de y des ordres impairs sont nulles pour $x=0$, comme dans le cas général. La même formule montre que l'on a $\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}}=0$ pour $\mu=1-2n$, et par conséquent

$$y=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{d^{-1-2n}y}{dx^{-1-2n}}=0;$$

la dérivée $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ est arbitraire, mais toutes celles des ordres pairs suivants sont déterminées en même temps qu'elle. D'après cela, si l'on désigne par C_1 la valeur arbitraire de

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(1-2n)}\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$$

pour $x=0$, la formule de Maclaurin donnera

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} y=C_1x^{1-2n}\Bigg[1&+\frac{m^2x^2}{2.(3-2n)}+\frac{m^4x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)}\\ &+\frac{m^6x^6}{2.4.6(3-2n)(5-2n)(7-2n)}+\ldots\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Si $2n$ est un entier pair négatif, les dérivées de y des ordres impairs s'annulent pour $x=0$, d'après les for-

mules (4), jusqu'à celle dont l'ordre est $-1-2n$. La valeur de la dérivée $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ peut être choisie arbitrairement comme dans le cas précédent, et les dérivées des ordres impairs qui suivent sont alors déterminées. D'ailleurs, la valeur de y qui répond à $x=0$ est arbitraire, dans le cas actuel, et elle détermine les valeurs des dérivées des ordres pairs. Donc la formule de Maclaurin donne ici une solution qui renferme deux constantes arbitraires et que l'on forme évidemment en faisant la somme des séries contenues dans les formules (6) et (7). Cette solution est l'intégrale générale; on l'obtiendrait, dans tous les cas, par la formule de Taylor, dont les coefficients peuvent être calculés au moyen des formules (2) et (3); mais le résultat est compliqué, et il n'y a aucun intérêt à en effectuer le calcul.

Changement de variable combiné avec l'emploi de la formule de Maclaurin.

760. Nous avons obtenu au numéro précédent une intégrale particulière de l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2n}{x}\frac{dy}{dx}-m^2y=0.$$

Pour avoir l'intégrale générale, il faudrait connaître une deuxième intégrale particulière, et, comme celle-ci n'est pas généralement développable par la formule de Maclaurin, il est naturel d'examiner si un changement de variables ne permettrait pas l'emploi de cette formule. A cet effet, nous poserons

$$y=x^{\mu}z,$$

μ étant un exposant indéterminé et z une variable nou-

velle. La différentiation donne

$$\frac{dy}{dx} = x^\mu \frac{dz}{dx} + \mu x^{\mu-1} z,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^\mu \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu x^{\mu-1} \frac{dz}{dx} + \mu(\mu - 1) x^{\mu-2} z.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (1) et divisant ensuite par x^μ, il vient

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2n + 2\mu}{x} \frac{dz}{dx} + \left[\frac{\mu(2n + \mu - 1)}{x^2} - m^2\right] z = 0.$$

Cette équation aura la même forme que la proposée si l'on fait

$$\mu = 1 - 2n;$$

la transformée devient, en effet,

$$(2) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2(1 - n)}{x} \frac{dz}{dx} - m^2 z = 0,$$

et elle se déduit de l'équation (1) en changeant n en $1 - n$ et en écrivant z au lieu de y; on ramène ainsi le cas de n négatif à celui de n positif. Il est évident, d'après cela, qu'on obtiendra une nouvelle intégrale particulière de l'équation (1) en changeant n en $1 - n$ dans celle qui a été obtenue au numéro précédent et en multipliant ensuite par x^{1-2n}.

Avec les deux intégrales particulières, on formera l'intégrale générale de la proposée, déjà obtenue dans le cas où $2n$ est un entier pair négatif, savoir

$$(3) \quad \begin{cases} y = C\left[1 + \dfrac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \dfrac{m^4 x^4}{2.4(2n+1)(2n+3)} + \ldots\right] \\ \quad + C' x^{1-2n}\left[1 + \dfrac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \dfrac{m^4 x^4}{2.4(3-2n)(5-2n)} + \ldots\right], \end{cases}$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires. Toutefois, il

faut excepter le cas où $2n$ est un entier impair positif ou négatif. Si l'on a $2n=1$, les deux intégrales particulières coïncident entre elles, et si $2n$ est un entier impair autre que $+1$, l'une des deux intégrales devient illusoire. Nous reviendrons plus loin sur ce cas d'exception.

761. Il convient de remarquer le cas de $n=1$; on détermine aisément les sommes des deux séries qui expriment les intégrales particulières. Dans le cas dont il s'agit, la formule (3) devient, en écrivant Cm au lieu de C,

$$y=\frac{C}{x}\left(\frac{mx}{1}+\frac{m^3x^3}{1.2.3}+\frac{m^5x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots\right)$$
$$+\frac{C'}{x}\left(1+\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)$$

ou

$$y=\frac{C}{x}\,\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{2}+\frac{C'}{x}\,\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2};$$

on peut écrire aussi, en désignant par A et B deux constantes arbitraires,

$$y=\frac{Ae^{mx}+Be^{-mx}}{x}.$$

La transformation que nous avons exécutée au numéro précédent conduit immédiatement à ce résultat. Effectivement, dans le cas de $n=1$, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{d^2z}{dx^2}-m^2z=0,$$

et son intégrale générale est

$$z=Ae^{mx}+Be^{-mx};$$

on en conclut immédiatement la valeur de y que nous venons d'obtenir.

Si m^2 est négatif et que l'on fasse $m^2 = -\mu^2$, l'intégrale de la proposée devra être écrite sous la forme

$$y = \frac{C \sin \mu x + C' \cos \mu x}{x}.$$

Emploi de la méthode des coefficients indéterminés.

762. Au lieu de faire usage de la formule de Maclaurin, on peut employer avec avantage la méthode des coefficients indéterminés, qui comporte une généralité plus grande.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

que nous avons déjà considérée, et essayons d'y satisfaire en posant

$$(2) \qquad y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

α, β, γ, δ, ... étant des exposants croissants. On tire de la formule (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \ldots, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \ldots. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\begin{aligned} &A[\alpha(\alpha+2n-1)x^{\alpha-2} - m^2 x^\alpha] \\ &+ B[\beta(\beta+2n-1)x^{\beta-2} - m^2 x^\beta] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

ce qui doit se réduire à une identité. Le plus petit exposant de x dans cette formule est $\alpha - 2$, et pour que le terme de ce degré disparaisse il faut que l'on ait

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 1 - 2n.$$

Parmi les termes qui restent, ceux qui ont le moindre degré sont ceux qui contiennent les facteurs x^α, $x^{\beta-2}$. On ne peut avoir $\beta - 2 > \alpha$, car il faudrait que l'on eût $A = 0$, hypothèse à rejeter. Donc on a

$$\beta - 2 = \alpha \quad \text{ou} \quad \beta - 2 < \alpha.$$

Si l'on admet la seconde hypothèse, il faudra que l'on ait

$$\beta(\beta + 2n - 1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = 1 - 2n.$$

Cela n'est admissible que si l'on a pris pour α la plus petite des deux valeurs 0, $1 - 2n$; alors on peut prendre pour β la plus grande des deux mêmes valeurs. Mais, si l'on a choisi pour α la plus grande des valeurs 0, $1 - 2n$, il faudra faire $\beta = \alpha + 2$.

Supposons que α et β aient reçu les valeurs 0 et $1 - 2n$: comme γ ne peut avoir l'une de ces valeurs, il faudra que l'on ait $\gamma = \alpha + 2$, puis $\delta = \beta + 2$, et ainsi de suite. Ces exposants étant connus, on déterminera immédiatement les coefficients.

Mais il est plus simple d'employer successivement les valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = 1 - 2n$, et de supposer

$$\beta = \alpha + 2, \quad \gamma = \beta + 2, \quad \delta = \gamma + 2, \quad \ldots.$$

Ainsi l'on fera d'abord

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \quad \ldots,$$

et, en écrivant que les termes du même degré en x disparaissent, on trouvera

$$B = \frac{m^2 A}{2(2n+1)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(2n+3)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(2n+5)}, \quad \ldots.$$

Faisant ensuite

$$\alpha = 1 - 2n, \quad \beta = 3 - 2n, \quad \gamma = 5 - 2n, \quad \ldots,$$

et opérant de la même manière, on aura

$$B = \frac{m^2 A}{2(3 - 2n)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(5 - 2n)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(7 - 2n)}, \quad \ldots.$$

Donc, en supposant dans l'un et l'autre cas $A = 1$, on a ces deux intégrales particulières

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n + 1)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(2n + 1)(2n + 3)} + \ldots,$$

$$y_2 = x^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3 - 2n)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(3 - 2n)(5 - 2n)} + \ldots\right],$$

d'où l'on conclut l'intégrale générale déjà obtenue au n° 760,

$$y = C y_1 + C' y_2,$$

en exceptant toutefois le cas où $2n$ est un entier impair positif ou négatif.

763. Il nous faut examiner ici ce cas particulier où $2n$ est un entier impair. Comme l'hypothèse de n négatif se ramène à celle de n positif, ainsi qu'on l'a vu plus haut, nous supposerons

$$2n = 2\nu + 1,$$

ν étant un entier nul ou positif. L'équation proposée devient alors

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

et nous n'en connaissons qu'une intégrale particulière, savoir

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{m^4 x^4}{2.4(2\nu + 2)(2\nu + 4)} + \ldots.$$

Si l'on emploie cette valeur de y_1, l'intégrale générale de l'équation proposée sera représentée (n° 733) par

$$y = Cy_1 + C'y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y_1^2 x^{2\nu+1}},$$

C, C' étant deux constantes arbitraires et x_0 une valeur initiale quelconque de x. En opérant sur la fonction $\frac{1}{y_1^2 x^{2\nu+1}}$ comme s'il s'agissait d'une fraction rationnelle, on pourra lui donner la forme

$$\frac{\alpha_0}{x^{2\nu+1}} + \frac{\alpha_1}{x^{2\nu-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu-1}}{x} + \frac{Y}{y_1^2},$$

Y étant une fonction qui reste finie pour $x = 0$. Par suite, on aura

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y_1^2 x^{2\nu+1}} = \frac{P}{x^{2\nu}} + G \log x + V,$$

P désignant un polynôme du degré 2ν, G une constante et V une fonction qui reste finie pour $x = 0$. Il résulte de là que l'équation proposée a nécessairement une intégrale de la forme

$$y = y_1 \left(\frac{P}{x^{2\nu}} + G \log x \right) + z,$$

z étant une fonction qui reste finie pour $x = 0$. Il est donc naturel d'employer la substitution qu'exprime la formule précédente et d'appliquer la formule de Maclaurin ou celle des coefficients indéterminés à l'équation transformée en z ; celle-ci ne différera de la proposée que par un second membre introduit par la substitution.

764. Nous nous bornerons à développer le calcul du cas le plus simple, celui de $\nu = 0$. L'équation proposée est alors

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

et l'intégrale particulière connue est

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2^2} + \frac{m^4 x^4}{2^2.4^2} + \frac{m^6 x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots$$

ou

$$y_1 = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{m^{2i} x^{2i}}{2^2.4^2\dots(2i)^2}.$$

Le polynôme désigné par P se réduit ici à une constante, et le produit Py_1 peut être confondu dans z; il est évident d'ailleurs qu'il est permis de faire $G = 1$, et nous devons poser en conséquence

$$y = y_1 \log x + z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}\log x + \frac{y_1}{x} + \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2}\log x + \frac{2}{x}\frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x^2} + \frac{d^2z}{dx^2},$$

et, en portant ces valeurs dans la proposée, on obtient la transformée

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - m^2 z = -\frac{2}{x}\frac{dy_1}{dx}.$$

Posons

$$z = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_i x^{2i} + \dots$$

et désignons, pour abréger, par

$$A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots + A_i x^{2i} + \dots$$

la valeur de y_1; substituons les valeurs de z et de y_1 dans l'équation différentielle et égalons les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres; on aura

$$4i^2 a_i - m^2 a_{i-1} = -4i A_i$$

ou

$$\frac{a_i}{A_i} - \frac{a_{i-1}}{A_{i-1}} = -\frac{1}{i},$$

et par conséquent

$$\frac{a_i}{A_i} - \frac{a_0}{A_0} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{i}\right);$$

rien n'empêche de supposer $a_0 = 0$, et alors on aura

$$a_i = -\frac{m^{2i}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2i)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}\right).$$

On a donc cette deuxième intégrale de la proposée

$$y_2 = y_1 \log x - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{m^{2i} x^{2i}}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2i)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}\right).$$

765. Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer qu'il pouvait y avoir avantage à exécuter un changement de variables avant de procéder au développement en série. Nous allons en donner un nouvel exemple en conservant la même équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Posons $\mu = \pm m$ et exécutons la substitution

$$y = z e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) e^{\mu x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) e^{\mu x};$$

nous obtiendrons, à cause de $\mu^2 = m^2$, la transformée suivante en z :

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx}\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Essayons maintenant de satisfaire à cette équation en posant

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots;$$

substituant et égalant à zéro le coefficient d'une puissance quelconque x^{i-2} de x, il vient

$$i(2n+i-1)a_i + 2\mu(n+i-1)a_{i-1} = 0.$$

Si $2n$ n'est pas un nombre entier négatif, la précédente équation déterminera le rapport des coefficients a_i, a_{i-1}, et l'on en conclura la valeur de a_i, savoir

$$a_i = (-2\mu)^i \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i \times 2n(2n+1)\ldots(2n+i-1)} a_0;$$

le premier coefficient demeure arbitraire.

Supposons que n soit un entier négatif $-k$. La relation obtenue entre a_i et a_{i-1} montre que a_{k+1} est nul, et il en est de même, en conséquence, de $a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_{2k}$. Le coefficient a_{2k+1} est arbitraire et les coefficients qui suivent sont déterminés en fonction de a_{2k+1}. Donc, dans le cas dont il s'agit, on obtient les deux intégrales suivantes de l'équation en z,

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,$$

$$z = a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k+2} x^{2k+2} + \ldots,$$

et, par suite, on a une intégrale particulière de la proposée, par une formule qui renferme un nombre limité de termes. J'ajoute qu'on a deux intégrales particulières de cette espèce, puisqu'on peut supposer à μ la double valeur $\pm m$.

Il résulte de là que, si n est un entier négatif, on peut exprimer sous forme finie l'intégrale générale de l'équation proposée; la même chose a lieu quand n est un entier positif, car on ramène ce cas au précédent, ainsi qu'on l'a déjà vu. On obtient d'ailleurs l'intégrale sous une forme très-remarquable en opérant comme il suit.

766. Posons

$$z = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}};$$

l'équation différentielle en z deviendra

$$\left[x\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + n\frac{d^n u}{dx^n}\right] + \left[(2\mu x + n)\frac{d^n u}{dx^n} + n.2\mu\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right] = 0;$$

la première partie entre crochets est la dérivée d'ordre n de la fonction $x\frac{du}{dx}$; pareillement, la seconde partie entre crochets est la dérivée d'ordre n de $(2\mu x + n)u$. On a donc, en intégrant n fois l'équation précédente et en désignant par P_{n-1} un polynôme arbitraire en x du degré $n-1$,

$$x\frac{du}{dx} + (2\mu x + n)u = P_{n-1}.$$

Mais, comme nous n'avons besoin que d'une valeur particulière de u, nous pouvons faire $P_{n-1} = 0$; l'équation précédente devient alors, en séparant les variables,

$$\frac{du}{u} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right)dx = 0,$$

et en intégrant

$$\log u + 2\mu x + n\log x = \text{const.};$$

faisant la constante égale à zéro, on a

$$u = e^{-2\mu x}x^{-n},$$

et par conséquent

$$z = \frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad y = e^{\mu x}\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Aux valeurs $+m$ et $-m$ de μ répondent deux intégrales particulières de la proposée; l'intégrale générale est

donc, dans le cas de n entier positif, en désignant par C, C′ deux constantes arbitraires,

$$y = Ce^{mx}\frac{d^{n-1}(e^{-2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}} + C'e^{-mx}\frac{d^{n-1}(e^{2mx}x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Si n est un entier négatif, il faut écrire $1-n$ au lieu de n et multiplier par x^{1-2n} le résultat obtenu (n° 760). L'intégrale générale de la proposée est donc, dans ce cas,

$$y = Ce^{mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{-2mx}x^{n-1})}{dx^{-n}} + C'e^{-mx}x^{1-2n}\frac{d^{-n}(e^{2mx}x^{n-1})}{dx^{-n}}.$$

De l'équation de Riccati.

767. L'équation de Riccati, dont nous nous sommes déjà occupé au n° 663, est

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

a et b étant des constantes données, m un exposant quelconque. On la ramène à une équation linéaire en posant

$$(2)\qquad y = \frac{1}{a}\frac{\frac{dz}{dx}}{z},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{z} - \frac{1}{a}\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^2};$$

il vient, par cette substitution,

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = ab\,x^m z.$$

L'équation (3) est linéaire, et son intégrale générale est de la forme

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires. Portant cette valeur dans la formule (2) et posant $\frac{C_2}{C_1} = C$, on aura

$$(4)\qquad y = \frac{1}{a}\,\frac{\frac{dz_1}{dx} + C\frac{dz_2}{dx}}{z_1 + Cz_2};$$

l'équation (4), qui renferme une constante arbitraire C, est l'intégrale générale de l'équation de Riccati. Mais il reste à trouver les intégrales particulières z_1, z_2 de l'équation (3). On obtiendrait sans difficulté ces intégrales en procédant directement au développement en série par la méthode des coefficients indéterminés; mais on peut éviter ce nouveau calcul en ramenant l'équation (3) à celle dont nous nous sommes occupé précédemment. En effet, posons

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t,$$

et prenons t pour variable indépendante au lieu de x; on aura

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m+2}{2}\,x^{\frac{m}{2}}\,\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4}\,x^m\,\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m^2+2m}{4}\,x^{\frac{m-2}{2}}\,\frac{dz}{dt},$$

et, si l'on porte la valeur précédente de $\frac{d^2z}{dx^2}$ dans l'équation (3), il viendra

$$(5)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m}{m+2}\,\frac{1}{t}\,\frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2}\,z = 0;$$

en même temps, on aura, par la formule (4),

$$(6)\qquad y = \frac{(m+2)\,x^{\frac{m}{2}}}{2a}\,\frac{\frac{dz_1}{dt} + C\frac{dz_2}{dt}}{z_1 + Cz_2},$$

z_1 et z_2 désignant deux intégrales particulières distinctes de l'équation (5). On voit que cette équation (5) n'est autre chose que celle qui a été étudiée aux nos 758 et suivants. On peut obtenir son intégrale, sous forme finie, lorsque $\dfrac{m}{m+2}$ est un nombre pair $\pm 2i$, positif ou négatif, c'est-à-dire lorsque le nombre m a la forme

$$m = \frac{-4i}{1 \mp 2i};$$

on retrouve ainsi les cas d'intégrabilité que nous avons déjà obtenus au n° 665.

De l'intégration des équations différentielles par le moyen des intégrales définies.

768. Au lieu d'exprimer par des séries les intégrales des équations différentielles, il y a souvent avantage à employer des intégrales définies. Le problème qu'il s'agit alors de résoudre consiste à exprimer, par une telle intégrale, la somme d'une série déterminée; il est impossible de donner une règle générale pour cet objet; aussi nous bornerons-nous à présenter un exemple.

Reprenons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Nous avons vu qu'elle admet l'intégrale

$$(2) \qquad y = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_i x^{2i} + \ldots,$$

dont les coefficients A satisfont à la condition

$$(3) \qquad A_i = \frac{m^2}{2i(2n+2i-1)} A_{i-1}.$$

Si l'on pose

$$(4)\qquad \varphi(i) = \frac{2i-1}{2n+2i-1}\,\varphi(i-1),$$

la condition (3) deviendra

$$\frac{A_i}{\varphi(i)} = \frac{m^2}{2i(2i-1)}\,\frac{A_{i-1}}{\varphi(i-1)},$$

et l'on conclut de là

$$\frac{A_i}{\varphi(i)} = \frac{m^{2i}}{1.2\ldots 2i}\,\frac{A_0}{\varphi(0)};$$

A_0 étant arbitraire, posons $A_0 = \varphi(0)$; on aura

$$(5)\qquad A_i = \frac{m^{2i}}{1.2\ldots 2i}\,\varphi(i).$$

Or, si n est positif, on reconnaît, au moyen de l'intégration par parties, que l'on satisfait à l'équation (4) en posant

$$\varphi(i) = \int_0^{\pi} \cos^{2i}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega;$$

on peut donc faire

$$A_i = \frac{m^{2i}}{1.2\ldots 2i}\int_0^{\pi} \cos^{2i}\omega \sin^{2n-1}\omega\, d\omega,$$

et la formule (2) donnera cette intégrale de l'équation (1)

$$y_1 = \int_0^{\pi}\left(1 + \frac{m^2x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{m^4x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \ldots\right)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega,$$

ou

$$y_1 = \int_0^{\pi} \frac{e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}}{2}\sin^{2n-1}\omega\, d\omega.$$

Pour avoir une seconde intégrale, il suffit (n° 760) de

changer n en $1-n$ et de multiplier ensuite par x^{1-2n}; on a donc

$$y_2 = x^{1-2n} \int_0^\pi \frac{e^{mx\cos\omega} + e^{-mx\cos\omega}}{2} \sin^{1-2n}\omega \, d\omega;$$

mais cela suppose que l'on a $n < 1$, car autrement l'intégrale contenue dans cette formule serait infinie.

769. Si m^2 est négatif, soit $m^2 = -\mu^2$, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0,$$

où n est compris entre 0 et 1, sera

$$y = C\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\sin^{2n-1}\omega\, d\omega + C' x^{1-2n}\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\sin^{1-2n}\omega\, d\omega,$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

Lorsque $n = \frac{1}{2}$, les deux intégrales particulières contenues dans cette formule se confondent; mais il est facile d'avoir l'intégrale générale qui répond à ce cas, en employant un artifice dont nous avons déjà plusieurs fois fait usage. Posons $2n = 1 - h$, on aura

$$\sin^{2n-1}\omega = 1 - h\log\sin\omega + \frac{h^2\log^2\sin\omega}{1.2}(\sin\omega)^{\theta h},$$

$$(x\sin\omega)^{1-2n} = 1 + h\log(x\sin\omega) + \frac{h^2\log^2(x\sin\omega)}{1.2}(x\sin\omega)^{\lambda h},$$

θ et λ étant compris entre 0 et 1. Si l'on porte ces valeurs dans la formule précédente, que l'on remplace $C + C'$ par C_1, $C'h$ par C_2 et qu'ensuite on fasse $h = 0$, il viendra

$$y = \int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\, d\omega + C_2\int_0^\pi \cos(\mu x\cos\omega)\log(x\sin^2\omega)\, d\omega,$$

ce qui est l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0.$$

Il serait facile de déduire ce résultat de l'analyse du n° 764.

Sur la détermination des intégrales définies par le moyen des équations différentielles.

770. Le problème dont il s'agit ici est l'inverse de celui dont nous venons de nous occuper. Lorsqu'une intégrale définie renferme un paramètre variable, on peut se proposer de former une équation différentielle à laquelle elle satisfasse et qui soit débarrassée du signe $\int$. Si l'on sait intégrer l'équation différentielle obtenue, on pourra déterminer la valeur de l'intégrale définie proposée; nous allons présenter un exemple.

Considérons l'intégrale définie

$$(1)\qquad y = \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,d\alpha,$$

où l'exposant $n+1$ est supposé positif. L'intégration par parties donne

$$\int \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,d\alpha = \frac{\sin\alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x}\int \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha\,d\alpha,$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,d\alpha = \frac{2(n+1)}{x}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha\,d\alpha$$

ou

$$(2)\qquad xy = 2(n+1)\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha\,d\alpha.$$

En différentiant deux fois l'équation (2), on a

$$(3) \qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} = -2(n+1)\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}}\,\alpha^3\,d\alpha,$$

d'où, par la soustraction,

$$(4) \qquad \frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = -2(n+1)\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,\alpha\,d\alpha.$$

Mais la différentiation de l'équation (1) donne aussi

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}}\,\alpha\,d\alpha,$$

et l'on a, par les formules (4) et (5),

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = 2(n+1)\frac{dy}{dx},$$

ou

$$(6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Cette équation est encore celle dont nous nous sommes occupé dans les numéros précédents. Nous savons l'intégrer, sous forme finie, quand n est un entier : on pourra donc déterminer, dans cette hypothèse, la valeur de l'intégrale proposée.

Soit, par exemple, $n = 0$. L'équation (6) se réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

et son intégrale générale est

$$y = Ce^x + C'e^{-x}.$$

Il reste à déterminer les constantes C et C'. D'abord on a $C = 0$ si l'on suppose x positif, car l'intégrale proposée ne peut pas croître indéfiniment avec x. Ensuite,

cette intégrale se réduisant à $\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}$, c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$, pour $x = 0$, on a $C' = \frac{\pi}{2}$; donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x},$$

dans le cas de $x > 0$, comme nous l'avons déjà établi au n° 496.

Exemple de la détermination de la somme d'une série donnée par le moyen d'une équation différentielle.

771. On peut quelquefois déterminer la somme d'une série dont les termes dépendent d'une variable, en formant une équation différentielle à laquelle satisfasse la somme de la série, et en intégrant ensuite cette équation. Souvent aussi l'on parvient, par le même procédé, à transformer des séries en d'autres plus commodes pour le calcul numérique; nous allons en présenter un exemple.

Proposons-nous de trouver la somme de la série convergente

$$(1)\quad X = 1 - \frac{x^2}{1.3.5} + \frac{x^4}{1.3.5.7.9} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.3.5\ldots(4n+1)} + \ldots$$

La variable x étant supposée réelle et positive, posons

$$y = X\sqrt{x},$$

on aura

$$(2)\quad y = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{1.3.5\ldots(4n+1)} + \ldots$$

Différentiant deux fois et multipliant par 4, il vient

$$(3)\quad 4\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{-\frac{3}{2}} - \left[x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \ldots\right];$$

puis on a, en ajoutant les équations (2) et (3),

$$(4) \qquad 4\frac{d^2y}{dx^2} + y = -x^{-\frac{3}{2}}.$$

Cette équation (4) est linéaire et à coefficients constants; en lui appliquant les règles que nous avons établies, on obtient pour son intégrale générale

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\left(C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right) \\ + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right), \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\left(C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx\right) \\ + \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\left(C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx\right). \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les constantes C, C′, nous ferons $x = 0$, et nous comparerons les équations (5) et (6) à l'équation (2) et à la suivante,

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1.3} + \ldots,$$

qu'on obtient en différentiant l'équation (2). Les seconds membres des équations (2) et (7) s'annulent pour $x = 0$; par suite, il doit en être de même des seconds membres des équations (5) et (6), ce qui exige que l'on ait $C = 0$, $C' = 0$. Remettant donc $X\sqrt{x}$ au lieu de y, dans la formule (5), on aura

$$(8) \quad X\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

La valeur de x ayant été supposée positive, on a (n° 516)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha$$

ou

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha,$$

et, si l'on remplace $x^{-\frac{1}{2}}$ par cette valeur dans le second membre de la formule (8), il viendra, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$X\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cos\frac{x}{2}\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\cos\frac{x}{2}\,dx$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sin\frac{x}{2}\int_0^\infty \alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

D'ailleurs (n° 488),

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\left(\frac{-\alpha\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{1+\alpha^2}\right)+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2},$$

$$\int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{x}{2}\,dx = 2e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\left(\frac{-\cos\frac{x}{2}-\alpha\sin\frac{x}{2}}{1+\alpha^2}\right)+\frac{2}{1+\alpha^2};$$

donc

$$X\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\frac{x}{2}\int_0^\infty\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{x}{2}\int_0^\infty\frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Les deux intégrales $\int_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}$, $\int_0^\infty \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}$ se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{4}-1}\,dz}{1+z} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

en posant $\alpha = z^{-\frac{1}{2}}$ dans la première et $\alpha = z^{\frac{1}{2}}$ dans la seconde; par conséquent, on a

$$(9)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\frac{x}{2}}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2},$$

ou

$$(10)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) - V,$$

en faisant

$$(11)\qquad V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\frac{x}{2}}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Le produit $V\sqrt{2\pi x}$ s'annule pour $x = +\infty$; par conséquent, si la valeur de x est très-grande, on aura, à fort peu près,

$$(12)\qquad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right):$$

il est évident que, pour de telles valeurs de x, l'emploi de la formule (1) serait impraticable. Mais nous pouvons aller plus loin en développant V en une série très-commode pour le calcul de X dans le cas des grandes valeurs de x. On a effectivement

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha^{2n-2} + (-1)^n\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^2},$$

d'où

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}d\alpha - \int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{5}{2}}d\alpha + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1}\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{4n-3}{2}}d\alpha + (-1)^n\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{4n+1}{2}}}{1+\alpha^2}d\alpha\right].$$

La dernière intégrale peut être représentée par $\theta\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{4n+1}{2}}d\alpha$, θ étant une quantité comprise entre 0 et 1 ; d'ailleurs on a (n° 516)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\frac{x}{2}}\alpha^{\frac{4i+1}{2}}d\alpha = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{4i+3}{2}}\Gamma\left(\frac{4i+3}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2\pi x}\,\frac{1.3.5\ldots(4i+1)}{x^{2i+2}};$$

donc

$$(13)\quad \begin{cases} V = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1.3.5}{x^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5\ldots(4n-3)}{x^{2n}} \\ \qquad\qquad + \theta(-1)^n\dfrac{1.3.5\ldots(4n+1)}{x^{2n+2}}. \end{cases}$$

En faisant croître n indéfiniment, on obtiendrait une série divergente ; mais, comme l'erreur commise quand on s'arrête à un terme quelconque est moindre que le terme suivant, la série pourra servir utilement au calcul de V pour les grandes valeurs de x. Elle est analogue, comme on voit, à la série de Stirling. En particulier, si x est > 10000, on pourra calculer X avec sept décimales exactes au moyen de la formule approchée (12).

Il est facile d'établir que l'équation $X = 0$ a une infinité de racines réelles et que les racines positives rangées par ordre de grandeur diffèrent de moins en moins

des racines correspondantes de l'équation

$$\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0,$$

lesquelles sont contenues dans la formule $x=(4i+3)\frac{\pi}{2}$; mais nous laisserons au lecteur le soin de développer ces conséquences de notre analyse.

CHAPITRE XI.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES OU AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Des équations aux dérivées partielles auxquelles on peut appliquer les procédés d'intégration relatifs aux équations différentielles ordinaires.

772. Une équation aux dérivées partielles renferme deux ou un plus grand nombre de variables indépendantes, une ou plusieurs fonctions inconnues de ces variables et quelques-unes de leurs dérivées partielles. Dans les problèmes qui conduisent à de telles équations, le nombre de ces équations est généralement égal au nombre des fonctions inconnues; les développements qui vont suivre seront bornés au cas d'une seule équation renfermant une seule fonction inconnue.

Le problème qui a pour objet l'intégration d'une équation aux dérivées partielles doit être regardé comme résolu lorsqu'il a été ramené à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires.

La réduction dont nous parlons a lieu d'elle-même lorsque les dérivées partielles qui figurent dans l'équation proposée se rapportent toutes à une variable unique. Dans ce cas, il est évident qu'on peut procéder comme si chacune des autres variables était un paramètre constant; mais il faudra regarder les constantes introduites par l'intégration comme des fonctions arbitraires des mêmes variables.

Considérons, par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z f(x, y) = F(x, y),$$

dans laquelle z est une fonction inconnue des variables x, y, et où f, F désignent des fonctions données des mêmes variables. La variable y étant traitée comme constante, l'intégration donnera (n° 658)

$$z = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\left[C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx} F(x, y)\,dx\right];$$

mais ici la constante C est une fonction arbitraire de y, et, en écrivant $\varphi(y)$ au lieu de C, on aura

$$z = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx}\left[\varphi(y) + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx} F(x, y)\,dx\right].$$

773. On peut opérer de la même manière dans le cas de certaines équations qui renferment des dérivées relatives à plusieurs variables indépendantes. Considérons par exemple l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

où a est une constante donnée et $f(x, y)$ une fonction donnée des variables indépendantes x, y. Si l'on pose

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

l'équation proposée deviendra

$$\frac{\partial p}{\partial y} + ap = f(x, y),$$

et sous cette forme elle rentre dans la classe de celles

dont nous venons de nous occuper. En intégrant comme si x était une constante et en désignant par X' la constante arbitraire, on a

$$p = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

Dans cette équation, il faut regarder X' comme une fonction arbitraire de x; en remettant $\frac{\partial z}{\partial x}$ au lieu de p, il vient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

Intégrons maintenant cette équation en regardant y comme une constante; on aura, en désignant par Y la constante arbitraire et par X la fonction arbitraire de x qui a pour dérivée X',

$$z = Y + X e^{-ay} + e^{-ay} \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} e^{ay} f(x, y)\, dy.$$

Il est évident que cette formule fait connaître la solution la plus générale de l'équation proposée; elle renferme deux fonctions arbitraires X, Y, la première indépendante de y, la seconde indépendante de x.

Des équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires par rapport aux dérivées.

774. Nous donnerons plus loin la définition de l'*intégrale générale* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, et nous établirons que la recherche de cette intégrale peut toujours être ramenée à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires, quel que soit le nombre des variables indépendantes. Mais nous nous occuperons exclusivement ici du cas

particulier des équations aux dérivées partielles du premier ordre dans lesquelles les dérivées n'entrent qu'au premier degré et ne se multiplient pas entre elles.

Cas de deux variables indépendantes. — Soient x, y, z trois variables dont la dernière est regardée comme fonction des deux autres; posons aussi

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

ce qui exprime que p et q représentent les dérivées partielles de z par rapport à x et à y respectivement.

L'équation aux dérivées partielles dont nous allons nous occuper est la suivante,

$$Pp + Qq = R; \tag{1}$$

P, Q, R y représentent des fonctions données des trois variables x, y, z.

On a vu (nº 83) que, si u et v désignent des fonctions données de x, y, z, on obtient une équation aux dérivées partielles de même forme que la proposée, en éliminant la fonction arbitraire φ de l'équation

$$v = \varphi(u), \tag{2}$$

par le moyen de celles qu'on en déduit par la différentiation relative à x et à y. Il est donc naturel de chercher si l'on peut satisfaire dans tous les cas à l'équation (1) en prenant pour z une fonction définie par l'équation (2), où φ désigne une fonction arbitraire et où u, v représentent des fonctions de x, y, z convenablement choisies.

En différentiant l'équation (2) par rapport à x et par rapport à y, on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} &= \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right);\end{aligned}\right.$$

par conséquent, pour que l'équation (2) donne une solution de l'équation (1), il faut et il suffit que l'on obtienne une équation identique en éliminant p et q entre les équations (1) et (3). Pour faire cette élimination, il suffit d'ajouter les équations (3) entre elles, après les avoir multipliées respectivement par P et Q; il vient alors, en se servant de l'équation (1),

$$\left(P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\varphi'(u)\left(P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

et cette équation aura lieu, quelle que soit la fonction φ, si l'on a identiquement

$$(4)\qquad \begin{cases} P\dfrac{\partial u}{\partial x}+Q\dfrac{\partial u}{\partial y}+R\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ P\dfrac{\partial v}{\partial x}+Q\dfrac{\partial v}{\partial y}+R\dfrac{\partial v}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Or on a vu (nº 626) que, si l'on désigne par

$$(5)\qquad u=\text{const.},\quad v=\text{const.}$$

les deux intégrales des équations différentielles ordinaires simultanées

$$(6)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

les fonctions u et v satisfont aux équations (4); si donc on prend pour u et v, dans l'équation (2), les fonctions ainsi déterminées, cette équation (2) donnera une solution de la proposée (1), quelle que soit la fonction φ.

775. J'ajoute que toute solution de l'équation (1) est comprise dans l'équation (2). En effet, supposons que l'équation (1) soit satisfaite par une valeur de z définie par l'équation

$$(7)\qquad F(x, y, z)=0,$$

On a, par la différentiation,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

et, les valeurs de p et de q tirées de ces équations étant substituées dans l'équation (1), on aura, par notre hypothèse,

$$(8) \qquad P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

équation qui doit devenir identique en vertu de l'équation (7).

Or les quantités que nous avons désignées par u et v sont des fonctions données de x, y, z; on peut donc regarder y, z comme des fonctions de u, v, x ou comme des fonctions de u, v, y. Soit, en conséquence,

$$(9) \qquad F(x, y, z) = f(u, v, x) = f_1(u, v, y);$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z},$$

et la substitution de ces valeurs dans l'équation (8) donnera, à cause des équations (4),

$$P\frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

la formule (9) donnera également

$$Q\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Si le premier membre de l'équation (7) ne se réduit

pas à une fonction des seules variables u, v, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ne seront pas identiquement nulles, et l'on ne peut pas admettre que l'une des équations $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}=0$ ait lieu en vertu de l'équation (7), $f(u,v,x)=0$ ou $f_1(u,v,y)=0$, car l'élimination de x ou celle de y donnerait une équation finale entre u et v, ce qui implique contradiction. Il faut donc que P et Q s'annulent, en vertu de l'équation (7), ce qui exige que R soit aussi zéro. Il est évident que, si P, Q, R s'annulent simultanément pour une certaine valeur de z, l'équation proposée sera en même temps satisfaite; mais nous faisons abstraction de ces solutions, et l'on voit alors que l'équation (7) a nécessairement la forme

$$\Phi(u, v) = 0,$$

d'où l'on tire pour v une valeur

$$v = \varphi(u),$$

qui ne dépend que de u.

776. Cas d'un nombre quelconque de variables. — L'analyse qui précède est applicable à toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées, quel que soit le nombre des variables indépendantes. C'est ce que nous allons établir.

Nous désignerons par

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

les n variables indépendantes, par z la variable principale, c'est-à-dire la fonction inconnue des variables indépendantes; nous ferons en outre

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Cela posé, la forme générale des équations aux dérivées

partielles que nous considérons est

$$(1)\qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = P,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ et P désignant des fonctions données des $n+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On a vu (n° 83) que, si

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

sont des fonctions données des variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que Φ représente une fonction arbitraire, l'équation

$$(2)\qquad \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

conduit à une équation aux dérivées partielles, telle que (1), par l'élimination de la fonction arbitraire. Cherchons donc si réciproquement, l'équation (1) étant donnée, il est possible d'y satisfaire par une équation telle que (2), en déterminant convenablement les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui y figurent.

En différentiant l'équation (2) par rapport à chacune des variables indépendantes, on obtient

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \ldots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0; \end{array}\right.$$

et, pour que l'équation (2) satisfasse à la proposée, il faut et il suffit que l'élimination des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les équations (1) et (3) conduise à une identité. On exécutera l'élimination dont il s'agit en ajoutant les équations (3), après les avoir multipliées respectivement par $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et en ayant égard ensuite à l'équa-

tion (1); on trouve ainsi

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left(P\frac{\partial u_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}\left(P\frac{\partial u_n}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)=0.\end{aligned}$$

Cette équation sera satisfaite, quelle que soit la fonction Φ, si l'on a identiquement

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&P\frac{\partial u_1}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n}=0,\\ &P\frac{\partial u_2}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &P\frac{\partial u_n}{\partial x}+P_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0,\end{aligned}\right.$$

et nous savons (n° 626) que ces dernières équations auront effectivement lieu si les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ont été choisies de telle manière que les équations

$$u_1=\text{const.},\quad u_2=\text{const.},\quad\ldots,\quad u_n=\text{const.}$$

soient les n intégrales du système d'équations simultanées

$$(5)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}.$$

777. Par le raisonnement du n° 775, on peut établir en outre que toute solution de l'équation (1) est nécessairement comprise dans l'équation (2); car, soit

$$(6)\qquad F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

une telle solution, on aura, par la différentiation,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad\ldots,\quad\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial x}=0;$$

tirons de là les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pour les substituer dans l'équation (1), il viendra

$$(7)\qquad P\frac{\partial F}{\partial x}+P_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\ldots+P_n\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Supposons qu'on ait exprimé les variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, à l'exception de x_i, en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et de x_i, et soit

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)=f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_i),$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i-1}}=\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_{i-1}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}=\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (7) et réduisant au moyen des équations (4), il viendra

$$P_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0.$$

Si donc les coefficients $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et P ne s'annulent pas en vertu de l'équation (6), on aura l'identité

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0,$$

d'où il résulte que l'équation (6) a bien la forme (2).

778. La méthode précédente fait connaître la solution la plus générale de l'équation proposée, et nous pouvons donner à cette solution le nom d'*intégrale générale*. Les résultats que nous avons établis se résument dans la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient $n+1$ variables x, x_1, x_2, ..., x_n, dont la première est fonction des autres; $p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n$ la différentielle totale dx de x; P, P_1, P_2, ..., P_n des fonctions données des variables x, x_1, x_2, ..., x_n. Pour avoir l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = P,$$

il suffira d'intégrer les équations différentielles ordinaires simultanées

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

Si l'on représente par

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad u_n = \text{const.}$$

les intégrales de ces équations, résolues par rapport aux constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles sera

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

La fonction arbitraire doit être déterminée, dans chaque problème, par des conditions particulières. On peut, par exemple, se donner comme condition que x se réduise à une fonction donnée de x_1, x_2, ..., x_{n-1} quand on attribue à la variable x_n une valeur déterminée ξ_n. Il est facile de voir que la fonction Φ peut toujours être choisie de manière à satisfaire à cette condition.

En effet, ξ_n désignant une valeur déterminée et f une fonction donnée, si l'on suppose

$$x_n = \xi_n, \quad x = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ deviendront des fonctions des $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Soit

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ u_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n &= \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}); \end{aligned}$$

l'élimination de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre ces équations donnera un résultat tel que

$$\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

et il est évident qu'on remplira la condition demandée en prenant pour Φ la fonction Ψ.

Application de la théorie précédente à quelques exemples.

779. Exemple I. — *On demande de trouver l'équation des cylindres d'après l'équation aux dérivées partielles qui appartient à ces surfaces.*

Les coordonnées rectilignes étant représentées par x, y, z, nous posons, comme à l'ordinaire, $dz = p\,dx + q\,dy$. En exprimant que le plan tangent est parallèle à une droite fixe, nous avons obtenu (n° 348), pour l'équation aux dérivées partielles des cylindres,

$$(1) \qquad ap + bq = 1,$$

a et b étant des constantes données; il s'agit d'intégrer cette équation.

A cet effet, nous poserons les équations simultanées

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

ou

$$dx - a\,dz = 0, \quad dy - b\,dz = 0.$$

Les intégrales de ces équations sont

$$x - az = \text{const.}, \quad y - bz = \text{const.};$$

par conséquent, l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est

(2) $$\Phi(x - az,\ y - bz) = 0.$$

Supposons qu'on veuille déterminer la fonction arbitraire par la condition que le cylindre passe par une courbe donnée ayant pour équations

(3) $$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Posons

$$x - az = u, \quad y - bz = v,$$

les équations (3) pourront s'écrire comme il suit :

$$\varphi(u + az, v + bz, z) = 0, \quad \psi(u + az, v + bz, z) = 0.$$

Éliminant z, on aura une équation résultante telle que

$$\Psi(u, v) = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(x - az, y - bz) = 0;$$

par conséquent, il faudra prendre pour Φ la fonction Ψ.

Supposons, en second lieu, qu'on veuille déterminer la fonction Φ par la condition que le cylindre soit circonscrit à une surface donnée ayant pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Il suffira de déterminer la courbe de contact de cette surface avec le cylindre, car, cette courbe étant connue,

on sera dans les conditions du cas précédent. Formons les équations des plans tangents au point (x, y, z) à la surface donnée et au cylindre, savoir :

$$(X - x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$
$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Comme les plans tangents dont il s'agit coïncident, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et, à cause de l'équation (1),

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation détermine, avec celle de la surface, la courbe de contact; on achèvera la solution comme dans le premier cas.

780. Exemple II. — *On demande de trouver l'équation des cônes d'après l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces.*

L'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques s'obtient (n° 349) en exprimant que le plan tangent passe par un point fixe qui est le sommet de la surface. Dans le système des coordonnées rectilignes, cette équation est

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du sommet.

Pour l'intégrer, il faut chercher les intégrales des équations simultanées

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}.$$

Ces intégrales sont

$$\log(x - x_0) - \log(z - z_0) = \text{const.},$$
$$\log(y - y_0) - \log(z - z_0) = \text{const.}$$

ou

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \text{const.}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \text{const.};$$

il en résulte que l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

On opérera de la même manière qu'au n° 779 si l'on veut déterminer la fonction Φ par la condition que le cône passe par une courbe donnée ou soit circonscrit à une surface donnée.

781. Exemple III. — *Trouver l'équation des surfaces conoïdes d'après leur équation aux dérivées partielles.*

L'équation aux dérivées partielles de ces surfaces s'obtient (n° 350) en exprimant que le plan tangent en chaque point renferme la génératrice qui y passe. Cette équation est, en coordonnées rectilignes,

$$px + qy = 0,$$

lorsqu'on prend la directrice pour axe des z et le plan directeur pour celui des xy. Pour l'intégrer, on cherchera les intégrales des équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0},$$

qui sont

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

on a donc

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

pour l'équation des conoïdes, φ étant une fonction arbitraire.

782. Exemple IV. — *Trouver l'équation des surfaces de révolution d'après leur équation aux dérivées partielles.*

Cette équation aux dérivées particlles est

$$py - qx = 0,$$

quand on suppose que les axes coordonnés sont rectangulaires et que celui des z coïncide avec l'axe de la surface; on l'obtient (n° 351) en exprimant que la normale rencontre l'axe.

Ici il faut intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

ou

$$x\,dx + y\,dy = 0, \quad dz = 0;$$

les intégrales sont

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

donc l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est

$$x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

783. Exemple V. — *On demande d'intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad z = px + qy + f(x, y),$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction donnée.

Les équations différentielles ordinaires qu'il faut considérer sont ici

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - f(x, y)}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, y)}{x} = 0.$$

De la première, on tire $\log y = \log x +$ const. ou

$$(3)\qquad y = Cx;$$

portant cette valeur de y dans la seconde équation, il vient

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{f(x, Cx)}{x}.$$

Cette équation est linéaire, et l'on trouve pour son intégrale

$$(4)\qquad z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(x, Cx)}{x^2}\,dx,$$

C′ étant une seconde constante et x_0 une valeur initiale de x quelconque. Maintenant il faut résoudre, par rapport aux constantes C, C′, les deux intégrales (3) et (4) que nous venons d'obtenir, et établir entre les valeurs trouvées une relation arbitraire; mais, pour cela, il est nécessaire de remplacer x par une autre lettre, ξ, sous le signe $\int$ contenu dans l'équation (4). Il vient alors

$$z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi, C\xi)}{\xi^2}\,d\xi,$$

ou, en remplaçant C par la valeur tirée de l'équation (3),

$$(5)\qquad z = C'x - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)d\xi}{\xi^2}.$$

Il reste à tirer des équations (3) et (5) les valeurs de C et de C′ pour les substituer dans l'équation

$$(6)\qquad C' = \varphi(C),$$

où φ désigne une fonction arbitraire; cela revient à éliminer C et C′ entre les équations (3), (5), (6). On a ainsi

$$(7)\qquad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x\int_{x_0}^{x} \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)d\xi}{\xi^2}.$$

Cette équation (7) est l'intégrale générale demandée.

Supposons que la fonction $f(x, y)$ soit

$$f(x, y) = \frac{axy}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+y^2}},$$

a étant une constante donnée. L'équation à intégrer est

$$z = px + qy + \frac{axy}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+y^2}},$$

et, d'après la formule (7), l'intégrale générale sera, en faisant $x_0 = 0$,

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - ay\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}\sqrt{a^2+\frac{y^2\xi^2}{x^2}}},$$

ou, en supposant $x > 0$ et en faisant, sous le signe $\int$, $\xi = \alpha x$, $d\xi = x\,d\alpha$,

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - axy\int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{a^2+x^2\alpha^2}\sqrt{a^2+y^2\alpha^2}}.$$

Des équations aux différentielles totales.

784. Avant de poursuivre l'étude des équations aux dérivées partielles, nous devons parler des équations aux différentielles totales que l'on rencontre dans certaines recherches. Nous nous bornerons au cas de trois variables x, y, z, dont l'une sera regardée comme une fonction des deux autres, et l'équation dont nous allons nous occuper est

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z. Il s'agit de savoir s'il existe une fonction z de x et y propre à vérifier l'équation (1) et de trouver cette fonction quand elle existe. Si l'on fait

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

et que l'on substitue cette valeur de dz dans l'équation (1), les différentielles restantes dx, dy étant arbitraires, il faudra que leurs coefficients soient nuls; on a donc

$$(2) \qquad P + Rp = 0, \quad Q + Rq = 0.$$

Ainsi, il nous faut satisfaire par une même valeur de z à deux équations aux dérivées partielles; cela n'est possible que dans le cas où une certaine condition se trouve remplie. Différentions la première équation (2) par rapport à y et la seconde par rapport à x; on aura

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + p\frac{\partial R}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} + p\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + q\frac{\partial R}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial Q}{\partial z} + q\frac{\partial R}{\partial z}\right) + R\frac{\partial q}{\partial x} = 0;$$

retranchant ces équations l'une de l'autre et remarquant que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, il vient

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0,$$

ou, en éliminant p et q par le moyen des équations (2),

$$(3)\quad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0;$$

telle est la condition que remplissent nécessairement les fonctions P, Q, R lorsque l'équation (1) est *intégrable*. Il reste à prouver que cette condition est suffisante; c'est ce que nous allons faire, en procédant directement à la recherche des solutions que l'équation (1) peut admettre.

785. Désignons par μ un facteur propre à rendre l'expression $Q\,dy + R\,dz$ différentielle exacte d'une fonction u des variables y et z; le facteur μ et la fonction u dépendront généralement de x. Posons, en conséquence,

$$(4)\qquad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

et faisons, en outre,

$$(5)\qquad \mu P = \frac{\partial u}{\partial x} + X,$$

X désignant une certaine fonction de x, y, z. L'équation (1), multipliée par μ, deviendra

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + X\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

ou

$$(6)\qquad du + X\,dx = 0.$$

u étant fonction de x, y, z, on peut regarder z comme fonction de x, y, u, et alors X deviendra fonction des

mêmes variables. Mais, puisque les différentielles du, dx figurent seules dans l'équation (6), u ne dépend que de x; donc il faut, pour la possibilité du problème, que X ne contienne pas y et soit fonction des seules variables x et u. Lorsque cette condition est remplie, il existe un facteur, fonction de x et de u, qui rend différentielle exacte le premier membre de l'équation (6); si l'on désigne par $\frac{\lambda}{\mu}$ un tel facteur, il est évident que λ sera un facteur propre à rendre une différentielle exacte le premier membre de l'équation proposée. On a ainsi ce théorème :

Lorsque l'équation $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ *est intégrable, il existe un facteur* λ *tel, que* $\lambda(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ *est une différentielle exacte* dU; *l'équation est donc satisfaite en posant* $U = C$, C *étant une constante arbitraire.*

786. Revenons à la condition de possibilité; elle est exprimée par l'équation $\frac{\partial X}{\partial y} = 0$, quand on regarde z comme fonction de x, y, u; mais, X étant exprimée en x, y, z, elle sera

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

la valeur $\frac{\partial z}{\partial y}$ doit être tirée de l'équation qui exprime u en fonction de x, y, z, et l'on a, en conséquence,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Éliminant donc $\frac{\partial z}{\partial y}$, notre condition devient

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

On a, d'ailleurs, par les formules (4) et (5),

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x};$$

si l'on substitue ces valeurs, ainsi que celles de $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, tirées des formules (4), l'équation de condition (7) deviendra

$$\mu Q\left[\frac{\partial(\mu R)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}\right] + \mu R\left[\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}\right] = 0.$$

Enfin, en ajoutant l'identité

$$\mu P\left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}\right] = 0$$

qui résulte des équations (4), effectuant les différentiations et supprimant le facteur μ, on trouve

$$(8)\quad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0,$$

ce qui est l'équation de condition déjà obtenue au n° 784.

On voit que, si cette condition est remplie, la quantité X qui figure dans l'équation (6) sera fonction des seules variables x et u. Dès lors, cette équation (6), qui n'est qu'une transformée de la proposée, sera une équation différentielle ordinaire, dont l'intégrale générale pourra être mise sous la forme

$$U = C,$$

C étant une constante arbitraire et U une fonction de x et de u, c'est-à-dire une fonction de x, y, z.

L'analyse précédente montre que l'équation de condi-

tion (8) est nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée admette une intégrale; elle donne, en outre, le moyen de déterminer cette intégrale quand elle existe.

787. Cas où P, Q, R sont des fonctions homogènes du même degré. — Supposons la condition d'intégrabilité remplie, et posons

$$x = x'z, \quad y = y'z,$$
$$P = P'z^n, \quad Q = Q'z^n, \quad R = R'z^n,$$

P', Q', R' étant des fonctions de x' et de y'. La proposée (1), divisée par z^{n+1}, devient

$$(P'dx' + Q'dy') + (P'x' + Q'y' + R')\frac{dz}{z} = 0$$

ou

$$\frac{dz}{z} + \frac{P'dx' + Q'dy'}{P'x' + Q'y' + R'} = 0;$$

le deuxième terme de cette équation ne dépend que des variables x', y', et il doit être une différentielle exacte, en vertu de l'équation de condition.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (x^2 + xz + z^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0.$$

On a ici

$$P' = y'^2 + y' + 1, \quad Q' = x'^2 + x' + 1, \quad R' = x'^2 + x'y' + y'^2,$$

et la proposée peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{dz}{z} + \frac{(y'^2 + y' + 1)dx' + (x'^2 + x' + 1)dy'}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = 0.$$

Or on a, par la décomposition en fractions simples,

$$\frac{y'^2 + y' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{y' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

$$\frac{x'^2 + x' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = \frac{x' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1},$$

ce qui permet de mettre notre équation sous la forme

$$\frac{dz}{z} + \frac{d(x'y' + x' + y')}{x'y' + x' + y'} - \frac{d(x' + y' + 1)}{x' + y' + 1} = 0.$$

On voit que chaque terme est une différentielle exacte; l'intégration donne, en désignant par α une constante arbitraire,

$$\log z + \log(x'y' + x' + y') - \log(x' + y' + 1) = \log \alpha,$$

d'où

$$z = \frac{\alpha(x' + y' + 1)}{x'y' + x' + y'}.$$

Remettant enfin $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ au lieu de x', y', il vient

$$xy + yz + zx = \alpha(x + y + z),$$

ce qui est l'intégrale de la proposée.

Définition de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Des intégrales complètes.

788. La variable x étant regardée comme fonction des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, posons

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n.$$

Toute équation telle que

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

est une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Si l'on peut trouver une valeur de x, fonction de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, qui satisfasse à l'équation proposée et qui se réduise à une fonction donnée arbitraire ξ de $x_1, x_2, \ldots,$

x_{n-1} quand on donne à x_n une valeur déterminée ξ_n choisie à volonté, l'équation qui détermine cette valeur de x sera dite l'*intégrale générale* de la proposée.

L'équation proposée et celles qu'on en déduit par des différentiations successives déterminent les valeurs de x et de ses dérivées des divers ordres, relatives à x_n, en fonction de x, x_1, x_2, ..., x_n, et des dérivées de x relatives à x_1, x_2, ..., x_{n-1}. On conclut aisément de là que l'intégrale générale, si elle existe, est unique.

L'existence de l'intégrale a été établie précédemment à l'égard des équations linéaires par rapport aux dérivées, et elle sera démontrée généralement, pour toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre, par la méthode même qui nous servira à la trouver.

789. Lagrange a nommé *intégrale complète* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à n variables indépendantes, toute équation entre les $n+1$ variables qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles et qui renferme n constantes arbitraires.

Soient

$$(1) \qquad F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à n variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n, et

$$(2) \qquad f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1). Si l'on différentie cette intégrale par rapport à chaque variable indépendante successivement, on aura

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

L'équation (1) doit devenir identique quand on y rem-

place x et $p_1, p_2, \ldots p_n$ par les valeurs tirées des équations (2) et (3); donc on doit reproduire l'équation (1) quand on élimine les n arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les équations (2) et (3).

L'intégrale générale de l'équation (1) renfermant une fonction arbitraire de $n-1$ variables, il est évident qu'on pourra en déduire une infinité d'intégrales complètes. Mais il est très-remarquable que réciproquement l'on puisse déduire d'une intégrale complète une solution renfermant une fonction arbitraire de $n-1$ variables et qui généralement coïncide avec l'intégrale générale.

Pour démontrer cette importante proposition, considérons la constante arbitraire a_n de l'équation (2) comme une fonction arbitraire $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ des $n-1$ autres arbitraires. L'équation (2), qui satisfait à l'équation (1), dans l'hypothèse des arbitraires constantes, ne cessera pas de la vérifier si l'on suppose les arbitraires variables, pourvu que les équations (3) subsistent dans cette dernière hypothèse.

Prenons la différentielle totale de l'équation (2) en considérant les arbitraires comme variables, mais en supposant que a_n soit remplacé par la valeur

$$(4) \qquad a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1});$$

écrivons aussi $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$ au lieu de dx; il viendra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx_n$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} da_{n-1} = 0.$$

Il est évident qu'on déduira les équations (3) de la précédente si les arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont dé-

finies par les équations

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

Si donc on pouvait éliminer $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ entre les équations (2) et (5), on obtiendrait une équation contenant une fonction arbitraire de $n-1$ quantités et satisfaisant à la proposée; une telle équation ne peut différer de l'intégrale générale. Mais l'élimination dont nous venons de parler n'est pas possible, à cause de la fonction arbitraire φ qui entre dans l'équation (2), et dont les dérivées partielles figurent dans les équations (5); il faut donc conserver le système des équations (2) et (5), qui définit l'intégrale générale d'une manière suffisante.

Il faut remarquer qu'à chaque intégrale complète de l'équation proposée répond une forme déterminée de l'intégrale générale, et que, relativement à cette forme, l'intégrale complète joue le rôle de solution particulière, en ce sens qu'elle ne s'y trouve pas comprise. On voit enfin que toute équation aux dérivées partielles du premier ordre résulte de l'élimination d'une fonction arbitraire par la méthode exposée au n° 87; cela suppose toutefois que l'existence de l'intégrale générale soit établie.

790. Les remarques qui précèdent s'appliquent à toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mais on a vu au n° 778 que, dans le cas des équations linéaires par rapport aux dérivées, l'intégrale générale peut être mise sous une forme particulière qui ne convient qu'à ce genre d'équations; cette intégrale doit coïncider avec celle que l'on déduit d'une intégrale complète. Nous allons éclaircir cela sur un exemple.

Considérons l'équation

$$z = px + qy,$$

linéaire par rapport aux dérivées; z est une fonction inconnue des variables x, y, et nous faisons comme à l'ordinaire

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

On satisfait à l'équation proposée en posant

$$z = ax + by,$$

a et b étant des constantes, car on tire de là $p = a$, $q = b$. L'équation précédente est donc une intégrale complète de la proposée. Pour avoir l'intégrale générale, il faut, d'après la méthode du n° 789, remplacer b par une fonction arbitraire $\varphi(a)$ de a et éliminer a entre les deux équations

$$z = ax + y\varphi(a), \quad 0 = x + y\varphi'(a),$$

dont la seconde s'obtient en différentiant la première par rapport à a. D'après cette seconde équation, $\varphi'(a)$ est égale à $-\frac{x}{y}$; donc a et $\varphi(a)$ sont des fonctions de $\frac{y}{x}$, et la première de nos deux équations montre que l'on a

$$\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

rien ne détermine la fonction ψ, et nous retrouvons par cette voie l'intégrale à laquelle conduit la méthode du n° 778.

Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, dans le cas de deux variables indépendantes.

791. Le problème qui constitue le calcul intégral des équations aux dérivées partielles est aujourd'hui com-

plétement résolu pour ce qui concerne les équations du premier ordre, c'est-à-dire que l'intégration d'une telle équation peut toujours être ramenée, quel que soit le nombre des variables indépendantes, à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires simultanées. Parmi les méthodes propres à atteindre ce but, il faut surtout distinguer celles de Jacobi et de Cauchy; je prendrai ici pour point de départ l'analyse de Cauchy, mais je présenterai en même temps quelques développements relatifs à une difficulté inhérente à cette analyse et que j'ai déjà publiés ailleurs.

792. Nous considérons d'abord le cas de deux variables indépendantes. Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée, dans laquelle z désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x, y, et où p, q représentent respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Il s'agit de trouver une valeur de z qui satisfasse à l'équation (1) pour toutes les valeurs de x et de y, et qui, pour une valeur donnée x_0 de x, se réduise à une fonction arbitraire donnée $f(y)$ de y. Ainsi l'on doit avoir en même temps

$$x = x_0, \quad z = f(y), \quad q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y);$$

le problème énoncé en ces termes est complétement déterminé.

Introduisons, avec Cauchy, une fonction actuellement indéterminée y_0 de x et de y; on pourra considérer y comme une fonction de x et de y_0, et alors z, p, q seront

aussi des fonctions de ces mêmes variables. On aura donc

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}\,dy_0,$$

et, si l'on porte ces valeurs de dz et de dy dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

qui exprime la définition de p et de q, il viendra

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y_0}\,dy_0 = p\,dx + q\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,dx + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0\right).$$

Cette équation ayant lieu quelles que soient les différentielles dx et dy_0, on a

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

(3) $$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\,\frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Si l'on différentie l'équation (2) par rapport à y_0 et l'équation (3) par rapport à x, puis que l'on retranche ensuite les deux résultats obtenus l'un de l'autre, il viendra

(4) $$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\,\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Cela posé, désignons par

$$dF = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (1); on aura, en différentiant cette équation (1) par rapport à y_0,

(5) $$Y\,\frac{\partial y}{\partial y_0} + Z\,\frac{\partial z}{\partial y_0} + P\,\frac{\partial p}{\partial y_0} + Q\,\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0,$$

et, si l'on porte dans l'équation (5) les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ et de $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ tirées des équations (3) et (4), il viendra

$$(6)\qquad \left(Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} = 0.$$

Or, la fonction de x et de y_0 qui représente y et que nous avons introduite est jusqu'ici indéterminée; nous en disposerons de manière que l'on ait

$$(7)\qquad P\frac{\partial y}{\partial x} - Q = 0,$$

et nous l'assujettirons en outre à se réduire à y_0 pour $x = x_0$. Ainsi l'on aura en même temps

$$x = x_0,\quad y = y_0,\quad z = z_0,\quad q = q_0,\quad p = p_0,$$

en posant, pour abréger,

$$z_0 = f(y_0),\quad q_0 = f'(y_0),$$

et en déterminant p_0 par l'équation

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation (1), dans laquelle on remplace x, y, z, p, q respectivement par x_0, y_0, z_0, p_0, q_0.

L'équation (7) réduit l'équation (6) à

$$(8)\qquad Y + Zq + P\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

en sorte que le problème proposé est ramené à trouver quatre fonctions y, z, p, q des deux variables indépendantes x et y_0, qui satisfassent généralement aux cinq équations (1), (2), (3), (7) et (8), et qui se réduisent

respectivement à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$; nous ne parlons pas de l'équation (4), parce qu'elle résulte, comme on l'a vu, des équations (2) et (3).

793. Mais les équations (1), (2), (7), (8) suffisent, comme on le verra, pour la détermination des inconnues y, z, p, q; l'équation (3) est donc surabondante, et il faut qu'elle se trouve vérifiée d'elle-même. Voici comment Cauchy a démontré cet important théorème.

Supposons que des équations (1), (2), (7), (8) on ait tiré pour y, z, p, q des valeurs déterminées, fonctions de x et de y_0, qui se réduisent respectivement à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$; les deux membres de l'équation (3) seront aussi des fonctions déterminées de x et de y_0, et, en désignant par T leur différence, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0} + \mathrm{T}. \tag{9}$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à x, et qu'on en retranche ensuite l'équation (2) préalablement différentiée par rapport à y_0, on aura, au lieu de l'équation (4),

$$\frac{\partial p}{\partial y_0} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}, \tag{10}$$

puis, en portant dans l'équation (5) les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ et de $\frac{\partial p}{\partial y_0}$ tirées des équations (9) et (10), il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\mathrm{Y} + \mathrm{Z}q + \mathrm{P}\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(\mathrm{Q} - \mathrm{P}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial y_0} \\ &\qquad\qquad + \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} + \mathrm{ZT} = 0; \end{aligned}\right. \tag{11}$$

enfin, à cause des équations (7) et (8), cette équation se

réduit à

$$P\frac{\partial T}{\partial x} - ZT = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}.$$

La quantité $-\frac{Z}{P}$ étant exprimée en fonction de x et de y_0, si l'intégrale $-\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx$ a une valeur finie et déterminée, on tirera de l'équation précédente

$$(12) \qquad \log\frac{T}{T_0} = -\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx, \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx},$$

en désignant par T_0 la valeur que prend T pour $x = x_0$. Mais, comme l'hypothèse $x = x_0$ réduit $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ à q_0 et $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ à 1, l'équation (9) montre que $T_0 = 0$, et, par suite, à cause de l'équation (12), on aura généralement

$$T = 0.$$

Nous examinerons plus loin le cas singulier dans lequel l'intégrale $\int_{x_0}^{x}\frac{Z}{P}dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée.

794. D'après ce qui précède, nous n'avons à considérer que les équations (1), (2), (7) et (8). On peut même, si l'on veut, remplacer l'équation (1) par sa dérivée relative à x; cette dérivée n'a pas en effet plus de généralité que l'équation (1), puisque les valeurs de y, z, p, q doivent se réduire à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$. Or la dérivée en question est

$$X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + Z\frac{\partial z}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

et, en y remplaçant $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q et Y par les valeurs tirées des équations (2), (7) et (8), elle se réduit à

$$(13) \qquad X + Zp + P\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Le problème dont nous nous occupons est donc ramené à trouver, au moyen de quatre des équations (1), (2), (7), (8), (13), des valeurs de y, z, p, q, fonctions de x et de y_0, qui se réduisent respectivement à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$.

Les équations (2), (7), (8), (13) forment en réalité un système de quatre équations simultanées aux dérivées partielles; mais, parce que ces équations ne renferment pas la variable indépendante y_0, elles doivent être traitées comme des équations différentielles ordinaires; elles sont comprises dans la formule unique

$$(14) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq},$$

et l'une d'elles, nous devons le répéter, peut être remplacée par l'équation (1).

Si le premier membre de l'équation (1) est une fonction linéaire relativement aux dérivées p et q, comme sa différentielle prise en ne faisant varier que p et q est $P\,dp + Q\,dq$, P et Q seront indépendantes de p et q, et F aura la forme $Pp + Qq - R$, R étant comme P et Q fonction de x, y, z. Dans ce cas, les deux premières des équations contenues dans la formule (14), savoir

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

permettent, sans le secours des autres, de déterminer les valeurs de y, z en fonction de x et y_0. On est ainsi ra-

mené, dans le cas des équations linéaires par rapport aux dérivées, à la règle du n° 774.

795. Supposons généralement que des équations (14) on ait tiré des valeurs de y, z, p, q se réduisant à y_0, z_0, p_0, q_0 pour $x = x_0$; soient

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= f_1(x, y_0, z_0, q_0),\\ z &= f_2(x, y_0, z_0, q_0),\\ p &= f_3(x, y_0, z_0, q_0),\\ q &= f_4(x, y_0, z_0, q_0)\end{aligned}\right.$$

ces valeurs; nous n'écrivons pas la lettre p_0 dans ces expressions, parce qu'on peut toujours supposer que l'on ait substitué sa valeur tirée de l'équation $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$; quant à x_0, c'est une valeur numérique déterminée dont il n'y a pas à s'occuper.

Les deux premières équations (15) donneront la solution du problème proposé si l'on y remplace z_0 par $f(y_0)$ et q_0 par $f'(y_0)$. Si l'on attribue à la fonction $f(y_0)$ une forme déterminée, et que l'on puisse éliminer y_0 entre les deux équations dont nous parlons, on aura l'expression de la fonction inconnue z en x et y. Mais, si la fonction $f(y_0)$ ou z_0 reste indéterminée, l'élimination de y_0 sera impossible, à moins que les valeurs de y et de z ne soient l'une et l'autre indépendantes de q_0; dans ce cas, si l'on résout les deux premières équations (15) par rapport à y_0 et z_0, on obtiendra des expressions de la forme

$$y_0 = \psi(x, y, z), \quad z_0 = \varphi(x, y, z),$$

et la solution du problème sera donnée par l'équation

$$\varphi = f(\psi),$$

d'où l'on conclut, comme on sait, que l'équation pro-

posée (1) est nécessairement linéaire par rapport aux dérivées p et q.

Si l'on fait abstraction du cas d'une équation linéaire, je dis qu'aucune des expressions de y et de z ne peut être indépendante de q_0. En effet, portons dans l'équation (3) les valeurs de y, z, q tirées des équations (15) : on aura

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \frac{\partial f_2}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_2}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) - f_4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) = 0;$$

cette équation doit avoir lieu identiquement, et, par suite, les termes multipliés par $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$ doivent se détruire. On a donc encore identiquement

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_0} - f_4 \frac{df_1}{\partial q_0} = 0;$$

le facteur $f_4 = q$ ne peut être nul généralement, d'où il suit que, si l'une des quantités $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$, $\frac{\partial f_2}{\partial q_0}$ est identiquement nulle, l'autre doit l'être aussi ; donc les deux fonctions f_1 et f_2 dépendent l'une et l'autre de q_0, ou elles sont l'une et l'autre indépendantes de cette quantité : ce dernier cas ne peut avoir lieu, comme on l'a vu plus haut, que si l'équation proposée est linéaire par rapport aux dérivées p et q.

Cela posé, si l'on élimine q_0 entre les deux premières équations (15), on obtiendra une équation qui pourra tenir lieu de la seconde d'entre elles et que je représenterai par

$$(16) \qquad V(x, y, z, y_0, z_0) = 0 \quad \text{ou} \quad V = 0.$$

Si l'on prend la différentielle totale de cette équation, et que l'on y remplace dz_0 par $q_0 dy_0$, dz par $p dx + q dy$,

il viendra

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)dy_0 = 0;$$

mais la première équation (15) donne

$$dy = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right)dy_0,$$

si l'on porte cette valeur de dy dans l'équation précédente, et il ne restera plus que les deux seules différentielles indépendantes dx et dy_0; en égalant donc à zéro les coefficients de celle-ci, on aura

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0}q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0}\frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0}\right) = 0.$$

Ces équations doivent devenir identiques si l'on y remplace y, z, p, q par les valeurs tirées des formules (15). Or celles-ci ne contiennent pas la quantité arbitraire $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$; il est donc nécessaire que cette quantité disparaisse de la dernière équation. Comme nous faisons abstraction du cas où l'équation proposée (1) est linéaire, la dérivée $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$ ne peut être nulle; il faut donc que $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$ s'annule, et, en conséquence, on a simultanément, par les équations précédentes,

$$(17)\qquad \frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0} = 0$$

et

$$(18)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Ainsi les quatre équations (16), (17) et (18) deviennent identiques en vertu des équations (15); elles déterminent d'ailleurs les valeurs de y, z, p, q, et, par suite, elles peuvent suppléer les équations (15).

En particulier, si l'on remplace, dans V, z_0 par $f(y_0)$, l'intégrale cherchée de l'équation (1) sera le résultat de l'élimination de y_0 entre les deux équations

(19) $$V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right) = 0,$$

$\left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)$ désignant la dérivée de V prise par rapport à y_0, mais en considérant z_0 comme fonction de y_0. Donc, pour avoir cette intégrale, il suffit de connaître la fonction V, et on l'obtiendra en éliminant p, q, p_0, q_0 entre les quatre intégrales des équations (14) et l'équation $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$.

796. Nous devons faire remarquer que l'équation

$$V = 0$$

constitue une intégrale complète de l'équation proposée (1), si l'on y regarde y_0 et z_0 comme deux constantes arbitraires.

En effet, dans la solution générale que nous venons de développer, on reconstruit l'équation proposée (1) en éliminant y_0 et z_0 entre les équations (16) et (18). Or, si, au lieu de regarder y_0 et z_0 comme des variables assujetties à vérifier l'équation (17), on considère ces quantités comme des constantes, il est clair que les équations (18) subsisteront et continueront avec l'équation (16) à reproduire l'équation (1) par l'élimination de y_0 et de z_0. Cette équation (16), qui renferme ainsi deux constantes arbitraires, est donc une intégrale complète de l'équation (1).

797. Exemple. — Pour donner une application de ce qui précède, considérons l'équation

$$z - apq = 0,$$

où a désigne une constante. On a ici

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1,$$

$$P = -aq, \quad Q = -ap, \quad Pp + Qq = -2apq = -2z,$$

et les équations simultanées à intégrer sont

$$\frac{dx}{aq} = \frac{dy}{ap} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q};$$

on trouve immédiatement les quatre intégrales suivantes,

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_0}}, \quad \frac{x - x_0}{aq_0} = \frac{y - y_0}{ap_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0}},$$

et l'on élimine tout de suite p_0 et q_0 entre les deux dernières en faisant usage de l'équation $z_0 - ap_0q_0 = 0$; on a

$$\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})^2}{z_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2p_0q_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{az_0}.$$

Si donc on fait

$$V = a\left[\sqrt{z} - \sqrt{f(y_0)}\right]^2 - (x - x_0)(y - y_0),$$

l'intégrale générale de l'équation $z = apq$ sera le résultat de l'élimination de y_0 entre les équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = 0.$$

798. La méthode que nous venons de développer suppose que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ conserve une valeur finie et déterminée; nous allons nous occuper ici de cette intégrale.

Supposons, pour abréger, que l'on ait résolu l'équation (16) par rapport à z et que l'on en ait tiré la valeur $z = M$, M étant une fonction donnée de x, y, y_0, z_0. Les équations (16) et (17) qui fournissent la solution cherchée de l'équation (1) seront plus simplement

$$z = M, \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0, \tag{21}$$

et les équations (18) qui déterminent les valeurs de p et de q seront

$$p = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{22}$$

Pour reconstruire l'équation proposée (1), il faut éliminer y_0 et z_0 entre les équations (20) et (22); par conséquent la différentielle totale dF du premier membre de cette équation s'obtiendra en ajoutant les différentielles totales des fonctions $M - z$, $\frac{\partial M}{\partial x} - p$, $\frac{\partial M}{\partial y} - q$, respectivement multipliées par des facteurs λ, μ, ν susceptibles de faire disparaître les différentielles dy_0 et dz_0, lesquelles doivent être regardées ici comme indépendantes; on aura donc

$$\left\{\begin{aligned} dF = &\left(\lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}\right) dx \\ &+ \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

et les facteurs λ, μ, ν devront vérifier les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial M}{\partial y_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} = 0, \\ &\lambda \frac{\partial M}{\partial z_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

De l'équation (23), on tire

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu},$$

et, à cause des équations (24),

$$-\frac{Z}{P} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial y_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}}.$$

Pour avoir l'intégrale dont nous avons besoin, il faut, dans cette expression, remplacer y par sa valeur tirée de l'équation (21), multiplier ensuite par dx, et intégrer entre les limites x_0 et x; or on peut éviter l'élimination de y en procédant comme il suit. Si l'on ajoute au numérateur de l'expression précédente de $-\frac{Z}{P}$, et que l'on en retranche ensuite la quantité

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)}\,\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0},$$

il viendra

$$-\frac{Z}{P}dx = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}\right)dx + \frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial}\right.}{\frac{\partial M}{\partial z_0}\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\,\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}\right)}$$

mais, en différentiant, dans l'hypothèse où x et y sont seules variables, l'équation (21) mise sous la forme

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)} + q_0 = 0,$$

on trouve

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial z_0}\right)dx = \left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0}\frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial y_0}\right)dy,$$

ce qui réduit l'expression précédente de $-\frac{Z}{P}\,dx$ à

$$-\frac{Z}{P}\,dx = \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial y}\,dy = d \log \frac{dM}{dz_0}.$$

Comme la fonction M doit se réduire à z_0 pour $x = x_0$ et $y = y_0$, il s'ensuit que, dans la même hypothèse, $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ se réduit à l'unité. On a donc, en intégrant l'équation précédente entre les limites x_0 et x,

$$(25)\qquad -\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx = \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

799. L'analyse du n° 793 se trouve en défaut lorsque l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée. Ainsi que l'a remarqué M. Bertrand, cette circonstance se présente, non pas seulement dans quelques cas particuliers, mais dans le cas le plus général. Et en effet il suffit généralement d'attribuer une forme convenable à la fonction $f(y)$ ou $f(y_0)$ ou z_0 pour que l'intégrale dont il s'agit devienne infinie. Mais je dis que :

Si pour une forme particulière de la fonction $f(y)$ l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée, les formules que nous avons établies deviennent illusoires et sont impropres à fournir la solution du problème proposé. Celle-ci est donnée dans ce

cas par l'intégrale complète de Lagrange qui accompagne l'intégrale générale.

On voit, en effet, par l'équation (25), que, si l'intégrale $\int_{-x_0}^{x} \frac{Z}{P} dx$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée pour une certaine forme de la fonction $f(y)$, la dérivée partielle $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ devient nulle, infinie ou indéterminée après la substitution de la valeur de y tirée de l'équation (21). Mais alors il est évident qu'on ne saurait tirer de cette équation (21) une valeur déterminée de y se réduisant à y_0 pour $x = x_0$, puisque la double hypothèse $x = x_0$, $y = y_0$ doit réduire $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ à l'unité. De ce qu'il est impossible de tirer de l'équation (21) une valeur déterminée de y se réduisant à y_0 pour $x = x_0$ il faut conclure que l'hypothèse $x = x_0$ fait disparaître y du premier membre de cette équation, et, parce que celle-ci est satisfaite quand on fait à la fois $x = x_0$, $y = y_0$, il est évident qu'elle est vérifiée identiquement, quel que soit y, quand on y fait $x = x_0$. Il résulte de là que y_0 disparaît de l'équation (20) quand on fait $x = x_0$, car la dérivée du second membre par rapport à y_0 est identiquement nulle ; cette équation donnera donc, dans cette hypothèse de $x = x_0$,

$$z = f(y),$$

puisque nous savons qu'elle a lieu identiquement quand on fait $y = y_0$, $z = z_0$, et que l'on a $z_0 = f(y_0)$. Concluons donc que, dans le cas particulier dont nous nous occupons, la solution du problème proposé sera donnée, non plus par le système des équations (20) et (21), mais par la seule équation (20).

800. Nous éclaircirons ce qui précède par un exemple. Soit l'équation

$$F = pz - pqy - aq = 0,$$

où a désigne une constante donnée. On a ici

$$X = 0, \quad Y = -pq, \quad Z = p,$$

$$P = z - qy = \frac{aq}{p}, \quad Q = -py - a = -\frac{pz}{q};$$

les équations simultanées à intégrer sont

$$\frac{-p\,dx}{aq} = \frac{q\,dy}{pz} = \frac{dz}{pqy} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{0},$$

et l'on en tire sans difficulté

$$q = q_0, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_0^2} + \frac{2(x - x_0)}{aq_0};$$

$$\frac{z}{p} = \frac{z_0}{p_0} + (x - x_0), \quad \frac{y}{p} = \frac{y_0}{p_0} - \frac{x - x_0}{q_0},$$

d'où, en remplaçant p_0 par sa valeur $\dfrac{aq_0}{z_0 - q_0 y_0}$,

$$y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + aq_0(x - x_0)}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$p = \frac{aq_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$q = q_0;$$

telles sont les valeurs de y, z, p, q en fonction de x, y_0, z_0, q_0. On a ensuite

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{p^2}{aq} = -\frac{aq_0}{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}$$

et

$$-\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}}.$$

On voit que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{Z}{P}\,dx$ devient infinie si l'on a

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0};$$

dans ce cas, la valeur de z_0 est

$$z_0 = \alpha y_0, \quad \text{d'où} \quad q_0 = \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire. Mais, si l'on suppose à z_0 cette valeur, nos formules deviennent illusoires, car elles donnent pour y et pour z les valeurs

$$y = \pm\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

qui sont indépendantes de y_0.

Éliminons q_0 entre les deux équations qui déterminent les valeurs de y et z. On tire de ces équations

$$z + q_0 y = \frac{z_0^2 - q_0^2 y_0^2}{\sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}},$$

$$z - q_0 y = \sqrt{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)},$$

et, par la multiplication,

$$z^2 - z_0^2 = q_0^2(y^2 - y_0^2),$$

au moyen de quoi la deuxième équation, élevée au carré, se réduit à

$$q_0(y^2 - y_0^2) = (yz - y_0 z_0) + a(x - x_0).$$

L'élimination de q_0 entre les deux dernières équations se fait immédiatement; on trouve

$$(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2) - [(yz - y_0 z_0) + a(x - x_0)]^2 = 0.$$

ou

$$z^2 - 2\left[z_0 - \frac{a(x-x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0}z + \frac{y^2}{y_0^2}z_0^2 - \frac{2a(x-x_0)}{y_0}z_0 + \frac{a^2(x-x_0)^2}{y_0^2} = 0;$$

c'est l'équation que nous avons désignée en général par $V = 0$; on en tire

$$z = \left[z_0 - \frac{a(x-x_0)}{y_0}\right]\frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(1-\frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\left(2az_0 - a^2\frac{x-x_0}{y_0}\right)},$$

formule dont le second membre est la quantité désignée par M. On vérifie aisément que l'équation

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial M}{\partial z_0} = 0$$

donne la valeur de y obtenue précédemment, et, en substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{\partial M}{\partial z_0}$, on trouve

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \frac{z_0 - q_0y_0}{\sqrt{(z_0 + q_0y_0)^2 + 2aq_0(x-x_0)}},$$

ce qui s'accorde avec les résultats généraux déduits de notre théorie.

Si l'on fait $z_0 = \alpha y_0$ dans l'équation $z = M$, on obtient

$$z = \left[\alpha - \frac{a(x-x_0)}{y_0^2}\right]y + \sqrt{\left(1-\frac{y^2}{y_0^2}\right)\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\left(2\alpha a y_0 - a^2\frac{x-x_0}{y_0}\right)};$$

cette valeur de z satisfait à l'équation proposée quand on regarde α et y_0 comme des constantes arbitraires; d'ailleurs, elle se réduit à

$$z = \alpha y$$

pour $x = x_0$; donc elle donne bien la solution du problème proposé dans le cas où l'on suppose la fonction $f(y)$ égale à αy.

Extension de la méthode précédente au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

801. La méthode précédente est applicable quel que soit le nombre des variables : c'est ce que nous allons établir ici succinctement, sans entrer dans la discussion des détails.

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n variables indépendantes, par x la variable principale; posons en outre

$$(1) \qquad dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction donnée des $2n+1$ variables

$$x, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n.$$

La fonction inconnue x n'est pas déterminée complètement par la condition de satisfaire à l'équation (2); mais elle le devient en général (n° 788) si on l'assujettit en outre à se réduire à une fonction donnée

$$\xi = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

des $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, lorsqu'on attribue à x_n la valeur particulière ξ_n. Alors, si l'on pose

$$d\xi = \varpi_1\,dx_1 + \varpi_2\,dx_2 + \ldots + \varpi_{n-1}\,dx_{n-1},$$

on devra avoir, pour $x_n = \xi_n$, non-seulement $x = \xi$, mais encore

$$p_1 = \varpi_1, \quad p_2 = \varpi_2, \quad \ldots, \quad p_{n-1} = \varpi_{n-1}.$$

Cela posé, désignons par

$$\xi_1, \; \xi_2, \; \ldots, \; \xi_{n-1}$$

des fonctions indéterminées de

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n;$$

on pourra considérer inversement

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

comme des fonctions de

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ x_n,$$

et alors x deviendra fonction des mêmes variables. La formule (1) fait connaître les dérivées partielles de x relatives à cette hypothèse. On a

$$(3)\qquad \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \ldots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \ldots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_i} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \ldots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi_{n-1}} = p_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}. \end{cases}$$

Différentions l'équation (3) par rapport à ξ_i et la $i^{\text{ième}}$ équation (4) par rapport à x_n; retranchons ensuite l'une de l'autre les deux équations obtenues, on aura

$$(5)\quad \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right);$$

comme l'indice i peut avoir les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$, l'équation (5) tient lieu de $n-1$ équations distinctes.

Désignons maintenant par

$$dF = X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n + P_1\,dp_1 + \ldots + P_n\,dp_n$$

la différentielle totale du premier membre de l'équation (2). On aura, en différentiant cette équation (2) par rapport à ξ_i,

$$X\frac{\partial x}{\partial \xi_i} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}$$
$$+ P_1\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} + \ldots + P_n\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ et $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ par leurs valeurs tirées des formules (4) et (5),

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(X_1 + Xp_1 + P_n\dfrac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \ldots + \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(X_{n-1} + Xp_{n-1} + P_n\dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\left(P_1 - P_n\dfrac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \ldots + \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(P_{n-1} - P_n\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à $n-1$ équations, l'indice i pouvant avoir les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$.

Or, les fonctions de $x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, qui expriment les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et que nous avons introduites, étant indéterminées, nous les assujettirons à satisfaire aux $n-1$ équations

$$(7)\quad P_1 - P_n\frac{\partial x_1}{\partial x_n} = 0,\quad \ldots,\quad P_{n-1} - P_n\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} = 0,$$

et à se réduire en outre, pour $x_n = \xi_n$, à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ respectivement, en sorte que l'on aura, pour $x_n = \xi_n$,

$$x = \xi,\ x_1 = \xi_1,\ \ldots,\ x_{n-1} = \xi_{n-1},\ p_1 = \varpi_1,\ \ldots,\ p_{n-1} = \varpi_{n-1},$$

et aussi

$$p_n = \varpi_n,$$

la valeur ϖ_n étant définie par l'équation

$$F(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n) = 0.$$

Les équations (7) réduisent les $n-1$ équations (6) à

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\left(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}p_1 + \mathrm{P}_n \frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right) + \ldots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\left(\mathrm{X}_{n-1} + \mathrm{X}p_{n-1} + \mathrm{P}_n \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0,$$

et celles-ci ne peuvent être satisfaites qu'en posant

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}p_1 + \mathrm{P}_n \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} = 0, \\ \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}p_2 + \mathrm{P}_n \dfrac{\partial p_2}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{X}_{n-1} + \mathrm{X}p_{n-1} + \mathrm{P}_n \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

parce que le déterminant D, formé avec les $(n-1)^2$ quantités

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}, \end{matrix}$$

ne peut être nul. On a, en effet,

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\,dx_n + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}\,d\xi_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$dx_{n-1} = \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\,dx_n + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}\,d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}\,d\xi_{n-1},$$

et, si le déterminant D était nul, on pourrait former, par l'élimination des différentielles $d\xi_1$, $d\xi_2$, ..., $d\xi_{n-1}$, une ou plusieurs équations de la forme

$$\mathrm{M}_1\,dx_1 + \mathrm{M}_2\,dx_2 + \ldots + \mathrm{M}_n\,dx_n = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas où il existe une relation entre les variables x_1, x_2, ..., x_n. Celles-ci étant indépendantes, D ne peut être nul, et les équations (8) ont lieu nécessairement.

D'après cela, le problème proposé est ramené à trouver $2n$ fonctions

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$$

des n variables

$$x_n,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1}$$

qui satisfassent aux $3n-1$ équations (2), (3), (4), (7), (8), et qui se réduisent respectivement à

$$\xi,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \varpi_1,\ \varpi_2,\ \ldots,\ \varpi_n$$

pour $x_n = \xi_n$.

802. Mais les $2n$ équations (2), (3), (7), (8) suffisent pour la détermination des $2n$ fonctions inconnues; il faut donc que les équations (4) soient satisfaites d'elles-mêmes, et c'est ce que l'on peut établir en répétant ici le raisonnement dont nous avons fait usage au n° 793. Supposons donc qu'on ait tiré des équations (2), (3), (7), (8) des valeurs de $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p_1, p_2, \ldots, p_n$ fonctions de $x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ et se réduisant respectivement à $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ pour $x_n = \xi_n$. Désignons par $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les différences entre les deux membres des équations respectives du système (4), en sorte qu'on ait

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \ldots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + T_i.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à x_n, et qu'on retranche ensuite l'équation (3) différentiée préa-

lablement par rapport à ξ_i, on aura

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial x_n}.$$

En employant les précédentes valeurs de $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ et de $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ au lieu de celles fournies par les équations (4) et (5), on formera une équation qui ne différera de l'équation (6) qu'en ce que son premier membre contiendra les nouveaux termes

$$\mathrm{XT}_i + \mathrm{P}_n \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial x_n},$$

et, comme tous les autres termes disparaissent en vertu des équations (7) et (8), on aura

$$\mathrm{XT}_i + \mathrm{P}_n \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial x_n} = 0,$$

l'indice i pouvant prendre les $n-1$ valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$.

On tire de là

$$\mathrm{T}_i = \Theta_i e^{-\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n} dx_n},$$

en désignant par Θ_i la valeur que prend T_i pour $x_n = \xi_n$. On reconnaît immédiatement que Θ_i est nulle, et, par conséquent, on a aussi

$$\mathrm{T}_i = 0,$$

pourvu que l'intégrale $\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}_n} dx_n$ conserve une valeur finie et déterminée. Pour la discussion des cas où l'intégrale dont il s'agit devient infinie ou indéterminée, je renverrai le lecteur au Mémoire dont j'ai déjà parlé [1].

---

[1] *Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIII, ou les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III.

803. D'après ce qui précède, il nous suffit de considérer les $2n$ équations (2), (3), (7) et (8). On peut même remplacer l'équation (1) par sa différentielle relative à x_n, savoir

$$X \frac{\partial x}{\partial x_n} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + X_n$$
$$+ P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \ldots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0,$$

puisque le problème proposé ne renferme aucune indétermination dans son énoncé. En remplaçant, dans la précédente équation, $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ par sa valeur tirée de l'équation (3), puis $\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$ par les valeurs tirées des équations (7) et (8), il vient

$$(9) \qquad X_n + X p_n + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0.$$

Nous sommes donc ramené à trouver, au moyen des $2n$ équations (3), (7), (8) et (9), des valeurs de $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui se réduisent respectivement à $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{n-1}$ pour $x_n = \xi_n$.

Les équations dont il s'agit sont, en réalité, aux dérivées partielles; mais, comme elles ne renferment pas les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, on doit les traiter comme des équations différentielles ordinaires. On peut les comprendre dans une formule unique, savoir

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{P_1} = \dfrac{dx_2}{P_2} = \ldots = \dfrac{dx_n}{P_n} = \dfrac{dx}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n} \\[2ex] = \dfrac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \dfrac{-dp_2}{X_2 + X p_2} = \ldots = \dfrac{-dp_n}{X_n + X p_n}; \end{cases}$$

mais il ne faut pas oublier que l'équation (1) peut tenir lieu de l'une des équations contenues dans la formule (10).

804. Supposons que l'on ait intégré les équations (10), et que l'on ait déterminé les constantes arbitraires de manière que l'on ait

$$x = \xi, \quad x_i = \xi_i, \quad p_i = \varpi_i$$

pour $x_n = \xi_n$. Soient alors

$$(11)\quad \begin{cases} x = \varphi(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \ldots, \varpi_n), \\ x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \ldots, \varpi_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \ldots, \varpi_n), \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} p_1 = \psi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \ldots, \varpi_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \psi_n(x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi, \varpi_1, \ldots, \varpi_n) \end{cases}$$

les intégrales résolues par rapport à x, x_1, ..., x_{n-1}, p_1, ..., p_n. L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles proposée sera le résultat de l'élimination de

$$\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$$

entre les n équations (11) et les $n+1$ équations

$$F(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n) = 0,$$

$$\xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

$$\varpi_1 = \frac{df}{d\xi_1}, \quad \varpi_2 = \frac{df}{d\xi_2}, \quad \ldots, \quad \varpi_{n-1} = \frac{df}{d\xi_{n-1}};$$

mais l'élimination ne sera possible, en général, que quand on aura fixé la fonction arbitraire f. Je n'examinerai point ici les formes diverses que l'on peut donner, suivant les cas, aux équations (11), et je renverrai pour cet objet au Mémoire déjà cité.

Remarque sur les solutions particulières que peuvent admettre les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

805. Sans entrer dans des développements que ne comportent pas les limites de cet Ouvrage, nous devons faire remarquer que l'analyse dont nous venons de faire usage permet de déterminer certaines solutions particulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Effectivement, soit $F = 0$ une équation aux dérivées partielles renfermant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la fonction x de ces variables et ses dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$; soit aussi $V = 0$ une intégrale complète de cette équation, dans laquelle figurent les n arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

L'équation $V = 0$ pouvant exprimer telle relation que l'on voudra, quand on considère les arbitraires a_1, $a_2, \ldots, a_n$ comme variables, il est évident qu'elle donnera toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles si les arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont assujetties à satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0.$$

En supposant nulles les différentielles $da_1, da_2, \ldots, da_n$, on retombe sur l'intégrale complète; en outre, on obtient, comme on l'a vu, l'intégrale générale en établissant une relation arbitraire entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$, puis en éliminant l'une des différentielles $da_1, da_2, \ldots, da_n$ au moyen de cette relation et en égalant à zéro les coefficients des différentielles restantes. Mais on satisfera aussi à la précédente équation en posant

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

L'élimination de a_1, a_2, ..., a_n entre ces équations et l'intégrale complète $V = 0$ donnera, en général, une solution particulière de l'équation proposée.

806. Considérons, par exemple, l'équation

$$z - px - qy = f(p, q),$$

qui renferme les variables indépendantes x, y, la fonction z et ses dérivées p, q; $f(p, q)$ désigne une fonction donnée de p et de q. Cette équation admet pour intégrale complète

$$z - ax - by = f(a, b),$$

a et b étant des constantes. L'intégrale générale résultera de l'élimination de a entre cette équation et sa dérivée relative à a, si l'on regarde b comme une fonction arbitraire de a. Enfin, on aura la solution particulière en éliminant a et b entre les trois équations

$$z - ax - by = f(a, b), \quad x + \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Si l'on suppose que x, y, z désignent des coordonnées rectilignes, l'intégrale complète représentera une famille de plans, l'intégrale générale une surface développable, enveloppe d'un plan mobile dont l'équation renferme une fonction arbitraire; enfin la solution particulière appartiendra à une surface déterminée tangente aux plans de l'intégrale complète et aux surfaces développables de l'intégrale générale. Ces résultats s'accordent avec ce que nous avons dit au n° 354.

Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, à deux variables indépendantes.

807. L'analyse ne possède aucune méthode générale pour l'intégration des équations aux dérivées partielles

des ordres supérieurs au premier. Il y a cependant quelques procédés qui réussissent dans certains cas, et, à cet égard, on doit surtout distinguer la classe des équations du deuxième ordre à deux variables indépendantes, étudiées pour la première fois par Monge, et reprises ensuite par Ampère dans un Mémoire qui fait partie du *Journal de l'École Polytechnique* (XVIIe et XVIIIe Cahiers). Nous croyons devoir faire connaître ici les résultats auxquels ont été conduits les géomètres que je viens de citer.

Les variables étant représentées par x, y, z, nous ferons

$$dz = p\,dx + q\,dy,\quad dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Cela posé, désignons par u et v deux fonctions données de x, y, z, p, q, savoir

$$u = f(x, y, z, p, q),\quad v = f_1(x, y, z, p, q),$$

et considérons l'équation du premier ordre

$$(1)\qquad \Phi(u, v) = 0,$$

dans laquelle Φ désigne une fonction arbitraire. En opérant comme au n° 82, on pourra éliminer la fonction arbitraire et l'on formera ainsi une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. Effectivement, la différentiation relative à x et celle relative à y donnent

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + s\frac{\partial v}{\partial p} + t\frac{\partial v}{\partial q}\right] = 0,$$

et, en éliminant le rapport des dérivées $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, on ob-

tient une équation de la forme

$$(2)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

dans laquelle H, K, L, M, N sont des fonctions données de x, y, z, p, q.

L'équation (1), de laquelle nous avons tiré l'équation (2), peut être mise sous la forme $v = \varphi(u)$, φ désignant une fonction arbitraire de u; elle est dite une *intégrale intermédiaire* de l'équation (2), et le problème qui aurait pour objet l'*intégration* de l'équation (2) est ramené à l'intégration de l'équation (1).

808. Supposons que H, K, L, M, N désignent, dans l'équation (2), des fonctions données de x, y, z, p, q. Il peut arriver que cette équation (2) n'admette pas d'intégrale intermédiaire; mais, quand une telle intégrale existe, on peut la déterminer par la méthode suivante.

Introduisons avec Ampère une fonction de x et de y actuellement indéterminée, et que nous représenterons par α; on pourra regarder y comme une fonction de x et de α, et, par suite, z, p, q deviendront aussi des fonctions de x et de α. On a, par les formules relatives au changement des variables indépendantes,

$$(3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = r + s\dfrac{\partial y}{\partial x}, & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = s\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial x} = s + t\dfrac{\partial y}{\partial x}, & \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = t\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

L'élimination de s et de t entre les trois dernières équations (4) donne d'abord

$$(5)\qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x};$$

ensuite on a, par les mêmes équations (4),

$$(6)\quad \begin{cases} t = \dfrac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\[2ex] s = \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial x}\,\dfrac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\[2ex] r = \left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x}\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}, \end{cases}$$

d'où

$$(7)\qquad rt - s^2 = -\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Substituons, dans l'équation (2), les valeurs de r, s, t, $rt - s^2$ tirées des valeurs (6) et (7); il viendra

$$(8)\qquad \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\,\frac{\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial x}\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) + 2\mathrm{K}\,\dfrac{\partial q}{\partial x} + \mathrm{M} - \mathrm{N}\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}\right)^2, \\[2ex] \mathfrak{Q} = \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2\mathrm{K}\,\dfrac{\partial y}{\partial x} + \mathrm{L} + \mathrm{N}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial q}{\partial x}\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Disposons maintenant de la fonction indéterminée de x et de α qui représente y, de manière que l'on ait $\mathfrak{Q} = 0$; l'équation (8) se réduira à $\mathfrak{P} = 0$; le problème sera donc ramené à trouver quatre fonctions, y, z, p, q, de x et

de α, qui satisfassent aux deux équations (3), à l'équation (5) et aux deux équations

$$\mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{Q} = 0.$$

Si, dans la deuxième formule (9), on remet, au lieu de $\frac{\partial p}{\partial x}$ et de $\frac{\partial q}{\partial x}$, les valeurs tirées des formules (4), il viendra

$$\mathfrak{Q} = (H + Nt)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{\partial r}{\partial x} + (L + Nr);$$

par conséquent, l'équation $\mathfrak{Q} = 0$ donnera

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt},$$

ou, en posant, pour abréger,

(10) $$G = K^2 - HL + MN,$$

et en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{G}}{H + Nt};$$

on tire de là

$$H\frac{\partial r}{\partial x} + N\left(s + t\frac{\partial r}{\partial x}\right) = K \pm \sqrt{G};$$

ou, en remettant $\frac{\partial q}{\partial x}$ au lieu de $s + t\frac{\partial r}{\partial x}$,

(11) $$H\frac{\partial r}{\partial x} + N\frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0.$$

Quant à l'équation $\mathfrak{P} = 0$, si l'on y remplace $H\frac{\partial r}{\partial x}$ par la valeur tirée de l'équation (11), elle devient

(12) $$H\frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial q}{\partial x} + M = 0.$$

Lorsque N n'est pas nul, l'équation (12) peut être rem-

placée par la suivante,

$$(13)\qquad N\frac{\partial p}{\partial x}-(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial y}{\partial x}+L=0,$$

que l'on obtient en éliminant $\frac{\partial q}{\partial x}$ entre les deux précédentes.

809. L'introduction de la variable α a pour effet de mettre en évidence la génération, par une courbe, de la surface représentée par l'équation aux dérivées partielles proposée. Ce paramètre α est constant pour une même génératrice, et, par suite, $d\alpha$ est nulle. Les équations (11) et (12) qui ont lieu pour cette courbe, ainsi que la première équation (3), peuvent donc être écrites comme il suit :

$$(14)\qquad \begin{cases} H\,dy+N\,dq-(K\pm\sqrt{G})\,dx=0,\\ H\,dp+(K\mp\sqrt{G})\,dq+M\,dx=0,\\ dz-p\,dx-q\,dy=0.\end{cases}$$

La méthode d'intégration que nous avons en vue ne réussit que dans le cas où il est possible de trouver une fonction V de x, y, z, p, q dont la différentielle totale se réduise à zéro en vertu des trois équations (14). On a

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz+\frac{\partial V}{\partial p}dp+\frac{\partial V}{\partial q}dq;$$

éliminons dp, dq, dz entre les équations (14) et l'équation $dV=0$; égalons ensuite à zéro les coefficients des différentielles restantes dx, dy; il viendra

$$(15)\qquad \begin{cases} N\frac{\partial V}{\partial x}+Np\frac{\partial V}{\partial z}-L\frac{\partial V}{\partial p}+(K\pm\sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial q}=0,\\ N\frac{\partial V}{\partial y}+Nq\frac{\partial V}{\partial z}+(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial p}-H\frac{\partial V}{\partial q}=0,\end{cases}$$

d'où, par l'élimination de $\frac{\partial V}{\partial q}$,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & H\frac{\partial V}{\partial x} - (K \pm \sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial y} \\ & \quad + [Hp + (K \pm \sqrt{G})q]\frac{\partial V}{\partial z} - M\frac{\partial V}{\partial p} = 0; \end{aligned}\right.$$

les deux équations (15) se réduisent à une seule quand $N = 0$: dans ce cas, il faut substituer l'équation (16) à l'une d'elles.

La fonction V doit donc satisfaire à la fois à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Réciproquement, il est facile de démontrer que, s'il existe une fonction V propre à vérifier les équations (15), et par suite l'équation (16), on satisfera à la proposée en posant

$$(17)\qquad dV = 0 \quad \text{ou} \quad V = \text{const.}$$

En effet, l'équation (17) donne, par la différentiation relative à x et à y,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + r\frac{\partial V}{\partial p} + s\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + s\frac{\partial V}{\partial p} + t\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Tirant de là les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial x}$ et de $\frac{\partial V}{\partial y}$ pour les substituer dans les équations (15), que nous supposons identiques, il vient

$$-(L + Nr)\frac{\partial V}{\partial p} \pm (K \pm \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$(K \mp \sqrt{G} - Ns)\frac{\partial V}{\partial p} - (H + Nt)\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

et l'élimination des dérivées $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$ donne ensuite

$$(L + Nr)(H + Nt) - (K - Ns)^2 + G = 0,$$

d'où, en réduisant,

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

810. Supposons d'après cela que les équations (15) admettent une solution commune ; si cette solution renferme une fonction arbitraire, elle donnera une intégrale intermédiaire de l'équation proposée. Or notre hypothèse sera réalisée si l'on peut trouver deux fonctions u, v de x, y, z, p, q dont les différentielles se réduisent à zéro en vertu des équations (14), car il est évident que la même propriété appartiendra à la fonction $\Phi(u, v)$, quelle que soit cette fonction Φ ; en conséquence, on satisfera aux équations (15) en prenant $V = \Phi(u, v)$, et l'on aura l'intégrale intermédiaire

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \text{ou} \quad v = \varphi(u),$$

φ désignant, comme Φ, une fonction arbitraire. Quant à la génératrice de la surface représentée par cette intégrale, elle est définie par les deux équations

$$u = \alpha, \quad v = \varphi(\alpha),$$

α étant un paramètre variable.

Il reste à intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Mais, si la quantité désignée par G n'est pas nulle, notre méthode peut nous fournir deux intégrales intermédiaires

$$v = \varphi(u), \quad v_1 = \varphi(u_1),$$

en prenant le radical $\sqrt{G}$ successivement avec le signe $+$ et avec le signe $-$; alors la détermination de z ne dépendra plus que de l'intégration d'une équation aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

p et q étant déterminées en fonction de x, y, z par les

deux intégrales intermédiaires. Pour effectuer ce dernier calcul, il conviendra de prendre pour variables indépendantes les quantités dont dépendent les fonctions arbitraires.

811. L'analyse précédente peut être étendue, sans difficulté, à toutes les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui admettent des intégrales intermédiaires. Mais, quand il s'agit d'une équation qui n'a pas la forme que nous avons supposée, les équations telles que (14), auxquelles conduit la méthode, renferment les dérivées r, s, t; il faut donc leur adjoindre les deux équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Le calcul est le même avec un peu plus de complication; nous ne pouvons insister davantage sur ce sujet.

Application de la théorie précédente à quelques exemples.

812. EXEMPLE I. — *On demande d'intégrer l'équation*

$$r - a^2 t = 0,$$

a étant une constante.

On a ici

$$H = 1, \quad K = 0, \quad L = -a^2, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = a;$$

les équations (14) du n° 809 donnent

$$dy \mp a\,dx = 0, \quad dp \mp a\,dq = 0,$$

d'où

$$y \mp ax = \text{const.}, \quad p \mp aq = \text{const.};$$

on a donc les deux intégrales intermédiaires

$$p + aq = 2a\varphi'(y + ax), \quad p - aq = -2a\psi'(y - ax),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires qui ont pour dérivées φ' et ψ'. On tire de là

$$p = a\varphi'(y + ax) - a\psi'(y - ax),$$
$$q = \varphi'(y + ax) + \psi'(y - ax),$$

puis

$$dz = \varphi'(y + ax)(dy + a\,dx) + \psi'(y - ax)(dy - a\,dx),$$

et par suite

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax);$$

il est inutile d'ajouter une constante, puisque les fonctions φ et ψ sont arbitraires.

813. L'équation $r - a^2 t = 0$ est celle à laquelle conduit le problème des *cordes vibrantes*; on peut obtenir directement son intégrale, sans recourir à la théorie des n°s 808 et suivants; il suffit effectivement de poser

$$y + ax = \alpha, \quad y - ax = \beta$$

et de prendre α et β pour variables indépendantes. On aura

$$p = a\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\right), \quad q = \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\right),$$

puis

$$r = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right),$$
$$t = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right);$$

la proposée devient alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial \beta}}{\partial \alpha} = 0,$$

et l'on en tire

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \psi'(\beta),$$

$\psi'(6)$ étant la dérivée d'une fonction arbitraire $\psi(6)$. Une deuxième intégration donne

$$z = \varphi(x) + \psi(6),$$

φ étant une deuxième fonction arbitraire. C'est le résultat auquel nous a conduit notre méthode générale.

814. Exemple II. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$rt - s^2 = 0,$$

qui appartient aux surfaces développables.

Les équations (15) du n° 809 se réduisent ici à

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Pour intégrer la première il faut regarder y, p, q comme constantes; dans l'intégration de la seconde on regardera x, p, q comme constantes. Alors on a, pour la première équation,

$$V = \text{une fonction de } z - px, y, p, q;$$

et, pour la seconde,

$$V = \text{une fonction de } z - qy, x, p, q;$$

on aura donc une solution commune aux deux précédentes équations en posant

$$V = \Phi(z - px - qy, p, q),$$

et l'on satisfera à la proposée en égalant à zéro cette valeur de V.

D'après cela, on a les deux intégrales intermédiaires suivantes de l'équation $rt - s^2 = 0$,

$$q = \varphi(p), \quad z - px - qy = \psi(p),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires. Mais on doit remarquer qu'il existe, dans le cas actuel, une solution qui renferme une fonction arbitraire de deux quantités, savoir

$$z - px - qy = \Psi(p, q).$$

Pour achever l'intégration de la proposée, il faut joindre l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$ aux intégrales intermédiaires; celles-ci donnent alors, par la différentiation,

$$dq = \varphi'(p)\,dp, \quad x\,dp + y\,dq + \psi'(p)\,dp = 0;$$

on a ensuite, par l'élimination de dq,

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

L'intégrale cherchée résultera donc de l'élimination de p entre les deux équations

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p), \quad 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p),$$

dont la seconde s'obtient en différentiant la première par rapport à p. On retrouve bien ainsi la surface enveloppe d'un plan mobile.

815. Exemple III. — *Trouver les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles.*

Les coordonnées rectangulaires étant x, y, z, si l'on prend le plan des zx parallèle aux plans des lignes de courbure, l'équation aux dérivées partielles des surfaces demandées sera (n° 322)

$$pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

On a ici

$$\text{H} = pq, \quad 2\text{K} = -(1 + p^2),$$

$$\text{L} = 0, \quad \text{M} = 0, \quad \text{N} = 0, \quad \sqrt{\text{G}} = \frac{1 + p^2}{2}.$$

Les équations (14) du n° 809 sont alors, en donnant à $\sqrt{G}$ le signe $+$,

$$dy = 0, \quad pq\,dp - (1+p^2)\,dq = 0,$$

et, en prenant $\sqrt{G}$ avec le signe $-$,

$$pq\,dy + (1+p^2)\,dx = 0, \quad dp = 0.$$

Considérons d'abord le premier système; on a

$$y = \text{const.},$$

puis

$$\frac{p\,dp}{1+p^2} - \frac{dq}{q} = 0,$$

d'où

$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.};$$

on a donc l'intégrale intermédiaire

$$q = \sqrt{1+p^2}\,\varphi'(y),$$

$\varphi'(y)$ étant la dérivée d'une fonction arbitraire $\varphi(y)$.

Considérons maintenant les deux équations du second système, qui, à cause de $p\,dx + q\,dy = dz$, sont

$$p\,dz + dx = 0, \quad dp = 0;$$

on en déduit

$$p = \text{const.}, \quad pz + x = \text{const.};$$

par conséquent,

$$x = -pz + \Psi(p)$$

sera la deuxième intégrale intermédiaire, Ψ étant une fonction arbitraire.

Il reste à intégrer l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

pour cela il convient de prendre y et p pour variables

indépendantes. La seconde intégrale donne

$$dx = -p\,dz - z\,dp + \Psi'(p)\,dp.$$

Substituant cette valeur de dx ainsi que celle de q tirée de la première intégrale, il vient

$$\sqrt{1+p^2}\,dz + \frac{zp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Psi'(p)\,dp + \varphi'(y)\,dy;$$

les deux membres de cette équation sont des différentielles exactes, et, comme on a

$$\int \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Psi'(p)\,dp = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\Psi(p) - \int \Psi(p)\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

si l'on fait, pour se débarrasser du signe $\int$:

$$\Psi(p) = (1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d\dfrac{\psi(p)}{\sqrt{1+p^2}}}{dp},$$

$\psi(p)$ étant une nouvelle fonction arbitraire, l'intégration donnera

$$z\sqrt{1+p^2} = -p\sqrt{1+p^2}\,\psi'(p) + \sqrt{1+p^2}\,\psi(p) + \varphi(y).$$

En même temps la seconde intégrale intermédiaire prendra la forme

$$x + pz = -(1+p^2)\psi'(p) + p\psi(p),$$

et l'équation des surfaces demandées sera le résultat de l'élimination de p entre les deux précédentes équations. Si l'on pose

$$V = z - px - \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y) - \psi(p),$$

le système de ces deux équations pourra être remplacé

par le suivant :

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Les surfaces auxquelles ces équations appartiennent admettent des lignes ombilicales (n° 319) qui sont déterminées par l'équation

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Application de la transformation de Legendre.

816. Nous avons fait connaître cette transformation au n° 92 ; elle est souvent utile dans le Calcul intégral : nous allons en donner un exemple.

Problème. — *Trouver l'équation générale des surfaces dans lesquelles les rayons de courbure principaux sont égaux en chaque point et dirigés en sens contraires.*

L'équation aux dérivées partielles des surfaces demandées est (n° 320)

$$(1) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0.$$

Si on lui applique la transformation de Legendre et qu'on fasse

$$(2) \qquad u = px + qy - z,$$

d'où

$$(3) \qquad x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q},$$

en prenant p et q pour variables indépendantes, elle deviendra

$$(4) \qquad (1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0.$$

Les équations (3) donnent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q};$$

par suite, l'équation (4) peut être écrite de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes :

$$(1 + q^2)\frac{\partial y}{\partial q} + 2pq\frac{\partial x}{\partial q} + (1 + p^2)\frac{\partial x}{\partial p} = 0,$$

$$(1 + q^2)\frac{\partial y}{\partial q} + 2pq\frac{\partial y}{\partial p} + (1 + p^2)\frac{\partial x}{\partial p} = 0.$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à p et la seconde par rapport à q, on obtient deux nouvelles équations qui se déduisent de la suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} (1 + q^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2} + 2pq\dfrac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial q} + (1 + p^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial p^2} \\ \qquad\qquad + 2q\dfrac{\partial U}{\partial q} + 2p\dfrac{\partial U}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

en posant $U = x$, $U = y$. Et si, en ayant égard à ce résultat, on remplace u par $px + qy - z$ dans l'équation (4), on verra que l'équation (5) est encore satisfaite par $U = z$. Ainsi les trois coordonnées, considérées comme fonctions de p et q, satisfont à la même équation aux dérivées partielles du deuxième ordre.

La méthode du n° 809 n'est pas applicable à l'équation (5); cependant les équations (15) de ce numéro, adaptées aux notations actuelles, sont satisfaites par une fonction V des deux seules variables p, q, et, en égalant cette fonction à une constante arbitraire α, on aura une intégrale particulière de l'équation (5). La même intégrale peut aussi s'obtenir par la première des équations (14) du n° 809, savoir

$$(1 + p^2)\,dq - \left(pq \pm \sqrt{-1 - p^2 - q^2}\right)dp = 0.$$

Cette équation différentiée dans l'hypothèse de $dq =$ const. donne

$$d^2p = 0,$$

d'où

$$\frac{dp}{dq} = \text{const.}$$

Je représenterai la constante par α ou par β, suivant qu'on prendra le radical $\sqrt{-1-p^2-q^2}$ avec l'un ou l'autre signe. Ainsi l'on aura

$$(6)\quad \begin{cases} 1+p^2 = \alpha\left(pq+\sqrt{-1-p^2-q^2}\right), \\ 1+p^2 = \beta\left(pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}\right). \end{cases}$$

L'équation (5) étant satisfaite quand on donne à U la valeur de α ou celle de β, il est évident qu'elle se simplifiera si l'on prend α et β pour variables indépendantes au lieu de p et q. On tire des formules (6)

$$p = \alpha q + \sqrt{-1-\alpha^2}, \quad p = \beta q + \sqrt{-1-\beta^2},$$

d'où

$$p = \frac{\alpha\sqrt{-1-\beta^2}-\beta\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta}, \quad q = \frac{\sqrt{-1-\beta^2}-\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha-\beta},$$

et l'on trouve que l'équation (5) se réduit à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$U = \Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$$

Φ et Ψ étant deux fonctions arbitraires. Ainsi l'on peut écrire

$$x = \frac{\partial u}{\partial p} = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta),$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires. Dans l'hypothèse

de q constante, on a

$$dp = q\,d\alpha + d\sqrt{-1-\alpha^2} = q\,d\beta + d\sqrt{-1-\beta^2}$$

donc

$$u = q[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)] + \sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi'(\alpha) + \sqrt{-1-\beta^2}\,\psi'(\beta)$$
$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha - \int_{\beta_0}^{\beta}\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta + \varpi(q),$$

$\varpi(q)$ étant une certaine fonction de q. Différentiant par rapport à q, il vient, par les formules précédentes,

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)] + \varpi'(q).$$

Mais, comme y est de la forme $\Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$, il faut que $\varpi'(q)$ soit une constante; alors on peut fondre cette constante dans les fonctions arbitraires φ, ψ, ce qui revient à la supposer nulle; donc on a

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)] + [\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)].$$

La fonction $\varpi(q)$ étant constante, elle se confond avec les intégrales qui figurent dans la précédente valeur de u et dont les limites inférieures sont arbitraires. De cette valeur de u on conclut celle de z par la formule (2), savoir

$$z = \int\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \int\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta.$$

Ainsi, l'intégrale de l'équation proposée résultera de l'élimination de α et de β entre les trois équations

$$(7)\quad\begin{cases} x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta), \\ y = \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta), \\ z = \int\sqrt{-1-\alpha^2}\,\varphi''(\alpha)\,d\alpha + \int\sqrt{-1-\beta^2}\,\psi''(\beta)\,d\beta, \end{cases}$$

où φ et ψ représentent deux fonctions arbitraires. Bien que ces formules (7) soient compliquées d'imaginaires,

elles n'en représentent pas moins une infinité de surfaces réelles.

Des équations linéaires aux dérivées partielles.

817. Considérons une équation aux dérivées partielles d'un ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais qui soit linéaire relativement à la fonction inconnue et à ses dérivées partielles. Il est évident que, si l'équation a un *second membre,* il suffira de connaître une solution particulière de l'équation pour faire disparaître ce second membre.

Si l'équation proposée n'a pas de second membre, elle jouira des deux propriétés que nous avons établies aux nos 724 et 725, dans le cas des équations linéaires ordinaires, savoir : 1° si l'on connaît une fonction qui satisfasse à l'équation aux dérivées partielles, on obtiendra une solution plus générale en multipliant la fonction dont il s'agit par une constante arbitraire; 2° si des fonctions données, en nombre quelconque, satisfont à l'équation, la somme de ces fonctions y satisfera aussi.

Lorsqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, linéaire et sans second membre, dont les coefficients sont constants, les propriétés dont nous venons de parler permettent d'obtenir une solution de l'équation qui renferme autant de constantes arbitraires que l'on veut; quelquefois même elles conduisent à une solution qui renferme des fonctions arbitraires. Pour le montrer, nous considérerons le cas où il n'y a que deux variables indépendantes x, y; mais notre raisonnement pourra s'appliquer à tous les cas.

818. Soit l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1)\quad 0 = a_0 z + \left(b_0 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \ldots,$$

d'un ordre quelconque n et dont les coefficients sont constants.

Remplaçons z par $e^{\alpha x+\beta y}$; le résultat de la substitution sera $e^{\alpha x+\beta y}f(\alpha,\beta)$, en posant

$$f(\alpha,\beta) = a_0 + (b_0\alpha + b_1\beta) + (c_0\alpha^2 + c_1\alpha\beta + c_2\beta^2) + \ldots.$$

Si donc l'équation

$$(2) \qquad f(\alpha,\beta) = 0$$

est satisfaite par $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, et que C_0 désigne une constante arbitraire, on satisfera à l'équation (1) en posant

$$z = C_0 e^{\alpha_0 x+\beta_0 y},$$

et, comme l'équation (2) admet une infinité de systèmes de solutions communes (α,β), on aura une solution de l'équation (1)

$$(3) \qquad z = \sum C e^{\alpha x+\beta y}$$

renfermant autant de termes que l'on voudra.

819. Il faut remarquer le cas où quelques-unes des racines β de l'équation (2) sont des fonctions linéaires de α; alors on peut obtenir une solution de l'équation aux dérivées partielles qui renferme autant de fonctions arbitraires qu'il y a de telles racines β. Supposons, en effet, que l'on puisse tirer de l'équation (2)

$$\beta = m\alpha + n.$$

La formule (3) donnera, en prenant pour β cette valeur,

$$z = e^{ny}\sum C\, e^{(x+my)\alpha}.$$

Le nombre des termes contenus sous le signe $\sum$ est indéterminé; les exposants α de ces termes et leurs coefficients C sont arbitraires; donc la somme n'est autre chose qu'une fonction arbitraire de e^{x+my}, ou, si l'on

veut, de $x+my$. Ainsi l'on aura cette solution

$$z = e^{ny}\Phi(x+my),$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

Pareillement, si l'équation (2) a une deuxième racine

$$\beta = m_1\alpha + n_1,$$

fonction linéaire de α, on pourra former la nouvelle solution de la proposée,

$$z = e^{n_1 y}\Phi_1(x+m_1 y),$$

et ainsi de suite. La somme de ces solutions, savoir

$$z = e^{ny}\Phi(x+my) + e^{n_1 y}\Phi_1(x+m_1 y) + \ldots,$$

sera encore une solution de la proposée.

820. Application au problème des cordes vibrantes. — Diverses questions de Physique mathématique conduisent à des équations aux dérivées partielles du genre de celles que nous venons de considérer. Dans ces questions, la fonction inconnue doit satisfaire en outre à certaines conditions particulières, et, pour avoir une solution complète, il faut qu'on puisse disposer des arbitraires de manière à remplir les conditions imposées. Nous nous bornerons ici au cas de l'équation du problème des cordes vibrantes, dont nous nous sommes déjà occupé aux nos 812 et 813.

Le problème dont il s'agit consiste à trouver une fonction y des variables x et t qui satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

et qui soit telle que l'on ait

$$y = F(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x) \quad \text{pour } t = 0, \tag{2}$$

$F(x)$ et $f(x)$ étant des fonctions de x données.

En substituant $e^{\alpha x+6t}$ à y dans l'équation (1), on a

$$6^2 - a^2\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$6 = +a\alpha, \quad 6 = -a\alpha;$$

il en résulte que l'on satisfait à l'équation (1) (n° 819) en posant

$$(3) \qquad y = \Phi(x+at) + \Psi(x-at),$$

Φ et Ψ étant des fonctions arbitraires. Il reste à satisfaire à la condition relative à $t=0$; on tire de l'équation (3)

$$(4) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = a\,\Phi'(x+at) - a\,\Psi'(x-at),$$

et, pour $t=0$, les équations (3) et (4) donnent

$$y = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a\,\Phi'(x) - a\,\Psi'(x).$$

Pour satisfaire aux équations (2), il faut poser

$$\Phi(x) + \Psi(x) = F(x),$$

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{a}\int_x^x f(x)\,dx = F_1(x);$$

on aura donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F_1(x),$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}F_1(x),$$

et par suite

$$y = \frac{F(x+at) + F(x-at)}{2} + \frac{F_1(x+at) - F_1(x-at)}{2}.$$

De l'intégration des équations aux dérivées partielles par les séries ou par les intégrales définies.

821. Les cas dans lesquels on peut intégrer exactement les équations aux dérivées partielles des ordres

supérieurs au premier qui se présentent sont très-peu nombreux, et l'on en est réduit, dans les applications, à essayer d'obtenir les intégrales par la voie des séries. Mais ce procédé lui-même n'est guère applicable que dans le cas des équations linéaires; on peut alors employer la formule de Maclaurin ou celle de Taylor, comme dans le cas des équations différentielles ordinaires. La méthode des coefficients indéterminés est souvent préférable, et elle offre plus de généralité, car elle permet de trouver le développement des intégrales en série ordonnée suivant les puissances d'une fonction quelconque des variables indépendantes.

On peut ainsi représenter les intégrales des mêmes équations par des séries diverses qui souvent diffèrent entre elles par le nombre des fonctions arbitraires; il en résulte cette conséquence qu'on ne saurait indiquer *a priori* le nombre et la nature des fonctions arbitraires qui doivent figurer dans l'intégrale la plus générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

822. Considérons par exemple l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que l'on rencontre dans la théorie mathématique de la chaleur et où a désigne une constante donnée.

On en tire, par la différentiation relative à t,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} = a\dfrac{\partial^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^2} = a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\\[2ex] \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^4\,\partial t} = a^2\dfrac{\partial^4 \dfrac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^4} = a^3\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^6},\\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et, si l'on donne à t la valeur particulière t_0, les équations (1) et (2) détermineront les valeurs correspondantes des dérivées successives de u relatives à t. Mais la valeur de u demeure une fonction arbitraire de x; en la désignant par $F(x)$, on aura, par la formule de Taylor,

$$(3)\quad \begin{cases} u = F(x) + \dfrac{aF''(x)}{1}(t-t_0) + \dfrac{a^2F^{\text{IV}}(x)}{1.2}(t-t_0)^2 \\ \qquad + \dfrac{a^3F^{\text{VI}}(x)}{1.2.3}(t-t_0)^3 + \ldots, \end{cases}$$

expression qui ne renferme, comme on voit, qu'une seule fonction arbitraire $F(x)$.

Supposons maintenant qu'on veuille développer u suivant les puissances ascendantes de $x - x_0$, x_0 étant une quantité déterminée choisie à volonté. L'équation (1) donnera

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t},$$

puis

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^5 u}{\partial x^4} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^6 u}{\partial x^4} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{a^3}\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les valeurs de u et de $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ qui répondent à $x = x_0$ sont

des fonctions arbitraires de t; si on les désigne respectivement par $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, les formules (4) et (5) détermineront les dérivées successives $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots$, et l'on aura, par la formule de Taylor,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{1.2}\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{\varphi''(t)}{1.2.3.4}\frac{(x-x_0)^4}{a^2} + \ldots \\ &+ \frac{\psi(t)}{1}(x-x_0) + \frac{\psi'(t)}{1.2.3}\frac{(x-x_0)^3}{a} + \frac{\psi''(t)}{1.2.3.4.5}\frac{(x-x_0)^5}{a^2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Cette expression de u se compose de deux séries distinctes, et elle renferme deux fonctions arbitraires $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Cependant la formule (6) n'a pas plus de généralité que la formule (3); Poisson a montré effectivement que les deux formules peuvent être transformées l'une dans l'autre, dans l'hypothèse de la convergence des séries (*Théorie mathématique de la chaleur*, p. 137).

823. Au lieu de développer les intégrales en séries, il y a quelquefois avantage à les représenter par des intégrales définies; il nous suffira de présenter un exemple de ce genre de calcul, et nous choisirons à cet effet l'équation dont nous venons de nous occuper, savoir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Appliquons à cette équation la méthode du n° 818; la substitution de $e^{\alpha x+\beta t}$ à u donne

$$\beta = a\alpha^2,$$

et, par conséquent, on a cette solution de notre équation

$$u = Ce^{a\alpha^2 t}e^{\alpha x} + C_1 e^{a\alpha_1^2 t}e^{\alpha_1 x} + \ldots,$$

qui renferme un nombre indéfini de constantes arbi-

traires $C, C_1, \ldots, \alpha, \alpha_1, \ldots$. Or on a (n° 498)

$$e^{\alpha^2 at} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} e^{2\alpha\omega\sqrt{at}}\, d\omega;$$

donc on peut écrire

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \left(C e^{\alpha(x+2\omega\sqrt{at})} + C_1 e^{\alpha_1(x+2\omega\sqrt{at})} + \ldots \right) d\omega.$$

La série

$$C e^{\alpha x} + C_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots$$

est propre à représenter une fonction arbitraire de e^x ou, si l'on veut, une fonction arbitraire de x; si on la désigne par $F(x)$, la valeur de u sera

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\omega\sqrt{at})\, e^{-\omega^2}\, d\omega;$$

elle se réduit à $F(x)$ pour $t = 0$, et, par conséquent, elle coïncide avec celle qui est donnée par la formule (3) du n° 822 quand on suppose dans celle-ci $t_0 = 0$. Toutefois, il faut remarquer que la formule précédente ne subsiste que si la fonction $F(x)$ est telle que le produit $e^{-x^2} F(x)$ s'annule quand x devient infini.

L'analyse dont nous venons de présenter un aperçu est surtout intéressante au point de vue des applications à la Physique mathématique; les Traités spéciaux, tels que celui de Poisson, en offrent de nombreux exemples; aussi croyons-nous inutile d'entrer ici, à ce sujet, dans des développements plus étendus.

CHAPITRE XII.

DE LA MÉTHODE DES VARIATIONS.

Définition des variations d'un système de variables qui dépendent de l'une d'entre elles.

824. Soient x et y deux variables qui dépendent l'une de l'autre, en sorte que l'on ait

$$(1) \qquad y = f(x).$$

Si l'on regarde x et y comme des coordonnées, l'équation précédente représentera une courbe, et, si l'on veut comparer cette courbe à celle que représente une autre équation quelconque

$$(2) \qquad y = f_1(x),$$

on pourra les comprendre l'une et l'autre, et cela d'une infinité de manières différentes, dans une même famille dont l'équation

$$(3) \qquad y = \mathrm{F}(x, \alpha)$$

renfermera un paramètre variable α. La fonction F doit être choisie de manière qu'elle se réduise successivement à f et à f_1 quand on donne au paramètre α deux valeurs particulières; par exemple, on pourra poser, en désignant par α_0 et α_1 deux valeurs déterminées quelconques de α,

$$\mathrm{F}(x, \alpha) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} f(x) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} f_1(x),$$

car cette formule donne

$$F(x, \alpha_0) = f(x), \quad F(x, \alpha_1) = f_1(x).$$

Et, si l'on veut avoir la fonction la plus générale $F(x, \alpha)$ qui remplisse la condition que nous exigeons, il est évident qu'il suffira d'ajouter à l'expression que nous venons de former une fonction arbitraire de x et de α, assujettie à la seule condition de s'annuler, quel que soit x, pour $\alpha = \alpha_0$ et pour $\alpha = \alpha_1$.

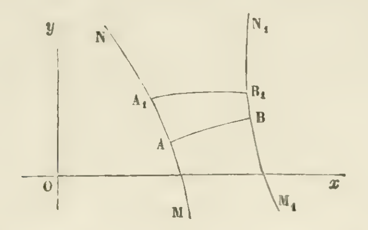
Lorsque l'on fait varier α de α_0 à α_1, la courbe représentée par l'équation (3) coïncide d'abord avec celle que représente l'équation (1), puis elle se déforme continuellement et vient enfin coïncider avec la courbe représentée par l'équation (2).

Si l'on veut comparer entre eux deux arcs des courbes (1) et (2) compris entre les ordonnées qui répondent à deux valeurs données x_0 et X de x, on pourra supposer que, quand α varie de α_0 à α_1, les divers points du premier arc viennent coïncider respectivement avec les points de l'arc de la seconde courbe (2), en se mouvant sur des parallèles à l'axe des y; alors les points des courbes (3) qui répondent à une valeur de x comprise entre x_0 et X seront *correspondants*.

825. Quels que soient les arcs des deux courbes que l'on veuille comparer entre eux, on peut toujours considérer le deuxième arc comme obtenu en déformant le premier, c'est-à-dire en faisant décrire certains chemins aux divers points du premier arc; les extrémités de chacun de ces chemins seront des points *correspondants* des deux courbes. Mais la déformation dont je viens de parler peut se faire d'une infinité de manières différentes, et c'est ce qu'il nous faut expliquer ici.

Soient AB et A_1B_1 les arcs des deux courbes que nous voulons regarder comme correspondants. Nous

pouvons choisir arbitrairement les courbes MN et M_1N_1 sur lesquelles se mouvront les extrémités A, B du premier



arc pour venir coïncider, après la déformation, avec les extrémités A_1, B_1 du deuxième arc. En outre, en opérant comme nous l'avons fait au numéro précédent, nous pourrons comprendre les deux courbes MN, M_1N_1, et cela d'une infinité de manières différentes, dans une même famille de courbes qui seront représentées par une équation

$$\mathfrak{F}(x, y, t) = 0, \tag{4}$$

où t désigne un paramètre variable; les courbes MN, M_1N_1 répondront à deux valeurs déterminées t_0, t_1 du paramètre t. Soit aussi

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{5}$$

l'équation d'une famille de courbes qui comprend les deux courbes AB, A_1B_1 que nous considérons, et supposons, comme au numéro précédent, que ces deux courbes répondent aux valeurs α_0, α_1 du paramètre α.

Les systèmes de courbes (4) et (5) détermineront tous les points du plan, car, si l'on fixe les valeurs de x et de y, ces équations feront connaître les valeurs de t et de α. On peut ainsi regarder x et y comme des fonctions de t et de α; supposons qu'on tire des équations (4) et (5)

$$x = \Phi(t, \alpha), \quad y = \Psi(t, \alpha). \tag{6}$$

Si l'on fait varier t en regardant α comme constante, les équations (6) détermineront une courbe du système α, lequel comprend les deux courbes données AB, A_1B_1. Si, au contraire, on fait varier α en regardant t comme constante, les équations (6) appartiendront à une courbe du système t, lequel comprend les courbes MN, M_1N_1, et chaque courbe du système t coupera les courbes données et les autres courbes du système α en des points que l'on pourra regarder comme correspondants.

826. Les considérations précédentes s'étendent d'elles-mêmes au cas d'un nombre quelconque de variables qui dépendent de l'une d'entre elles. On peut effectivement énoncer la proposition suivante :

On peut toujours, et cela d'une infinité de manières, trouver n fonctions Φ, Ψ, Π, ... de deux variables t et α telles que, en posant généralement

$$(7)\qquad x = \Phi(t, \alpha),\quad y = \Psi(t, \alpha),\quad z = \Pi(t, \alpha),\quad \ldots,$$

on ait respectivement pour les valeurs α_0 et α_1 de α

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \varphi_0(t), & y = \psi_0(t), \quad z = \varpi_0(t), \quad \ldots, \\ x = \varphi_1(t), & y = \psi_1(t), \quad z = \varpi_1(t), \quad \ldots, \end{cases}$$

et, pour les valeurs t_0, t_1 du paramètre t,

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \Phi_0(\alpha), & y = \Psi_0(\alpha), \quad z = \Pi_0(\alpha), \quad \ldots, \\ x = \Phi_1(\alpha), & y = \Psi_1(\alpha), \quad z = \Pi_1(\alpha), \quad \ldots, \end{cases}$$

quelles que soient les fonctions données φ_0, φ_1, ψ_0, ..., Φ_0, Φ_1, Ψ_0, ... Il est évident, toutefois, que les fonctions Φ_0, Ψ_0, Π_0, ... doivent être égales respectivement à φ_0, ψ_0, ϖ_0, ... quand on suppose $\alpha = \alpha_0$, $t = t_0$, et à φ_1, ψ_1, ϖ_1, ... quand on suppose $\alpha = \alpha_1$, $t = t_0$; pareillement, les fonctions Φ_1, Ψ_1, Π_1, ... doivent être égales à φ_0, ψ_0, ϖ_0, ... ou à φ_1, ψ_1, ϖ_1, ... lorsqu'on suppose $\alpha = \alpha_0$, $t = t_1$ ou $\alpha = \alpha_1$, $t = t_1$.

Par exemple, si l'on pose

$$\Phi(t_0, \alpha_0) = \varphi_0(t_0) = \Phi_0(\alpha_0) = A,$$
$$\Phi(t_0, \alpha_1) = \varphi_1(t_0) = \Phi_0(\alpha_1) = B,$$
$$\Phi(t_1, \alpha_0) = \varphi_0(t_1) = \Phi_1(\alpha_0) = C,$$
$$\Phi(t_1, \alpha_1) = \varphi_1(t_1) = \Phi_1(\alpha_1) = D,$$

on pourra prendre pour $\Phi(t, \alpha)$ l'expression suivante,

$$\begin{aligned}\Phi(t, \alpha) = {} & \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0}\varphi_0(t) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}\varphi_1(t) \\ & + \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\left[\Phi_0(\alpha) - A\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - B\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}\right], \\ & + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\left[\Phi_1(\alpha) - C\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - D\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}\right];\end{aligned}$$

et de même pour les autres, $\Psi(t, \alpha)$, ...

Les équations de la première ligne du système (8) définissent un système quelconque de variables qui dépendent de l'une d'entre elles. Si l'on prend x pour variable indépendante, elles pourront être représentées par

$$(10) \qquad y = f(x), \quad z = f^{(1)}(x), \quad u = f^{(2)}(x), \quad \ldots.$$

Pareillement, les équations de la deuxième ligne du système (8) définissent un second système de fonctions

$$(11) \qquad y = f_1(x), \quad z = f_1^{(1)}(x), \quad u = f_1^{(2)}(x), \quad \ldots,$$

et les deux systèmes seront compris dans le système plus général défini par les équations (7); ils répondent, l'un à l'hypothèse $\alpha = \alpha_0$, l'autre à l'hypothèse $\alpha = \alpha_1$.

827. Supposons que l'on attribue à α une valeur quelconque déterminée; les équations (7) définiront un système de fonctions $y, z, \ldots$ de la variable x. Si l'on

pose, en outre,

$$\begin{array}{llll} dy = y'\,dx, & dz = z'\,dx, & du = u'\,dx, & \ldots, \\ dy' = y''\,dx, & dz' = z''\,dx, & du' = u''\,dx, & \ldots, \\ dy'' = y'''\,dx, & dz'' = z'''\,dx, & du'' = u'''\,dx, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

les nouvelles variables y', z', u', ..., y'', z'', u'', ... pourront être exprimées, de même que x, y, z, ..., en fonction de t et de α. Par exemple, la différentiation des équations (7) donne

$$dx = \frac{\partial\Phi(t,\alpha)}{\partial t}\,dt, \quad dy = \frac{\partial\Psi(t,\alpha)}{\partial t}\,dt, \quad dz = \frac{\partial\Pi(t,\alpha)}{\partial t}\,dt, \quad \ldots,$$

et l'on en conclut

$$y' = \frac{\partial\Psi(t,\alpha)}{\partial t} : \frac{\partial\Phi(t,\alpha)}{\partial t}, \quad z' = \frac{\partial\Pi(t,\alpha)}{\partial t} : \frac{\partial\Phi(t,\alpha)}{\partial t}, \quad \ldots;$$

on aura de même y'', z'', ... par une nouvelle différentiation, et ainsi de suite.

828. Les variables $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', \ldots$ étant ainsi exprimées en fonction de t et de α, regardons t comme constante et faisons varier α de $d\alpha$; x, y, z, ... prendront des accroissements dont les expressions seront

$$\begin{gathered} \Delta x = \frac{\partial\Phi(t,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\Phi(t,\alpha)}{\partial\alpha^2}\,\frac{d\alpha^2}{1.2} + \ldots, \\ \Delta y = \frac{\partial\Psi(t,\alpha)}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\Psi(t,\alpha)}{\partial\alpha^2}\,\frac{d\alpha^2}{1.2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Si l'on emploie la caractéristique δ pour désigner les différentielles des divers ordres relatives à la seule va-

riable α, on pourra écrire plus simplement

$$\Delta x = \delta x + \frac{\delta^2 x}{1.2} - \dots,$$

$$\Delta y = \delta y + \frac{\delta^2 y}{1.2} + \dots,$$

$$\Delta z = \delta z + \frac{\delta^2 z}{1.2} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et l'on aura aussi

$$\Delta y' = \delta y' + \frac{\delta^2 y'}{1.2} + \dots,$$

$$\Delta z' = \delta z' + \frac{\delta^2 z'}{1.2} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Les différentielles

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \dots,\ \delta y',\ \delta z',\ \dots,\ \delta y'',\ \dots$$

sont dites les *variations* des variables

$$x,\ y,\ z,\ \dots,\ y',\ z',\ \dots,\ y'' \dots;$$

elles sont relatives au passage du système de fonctions que déterminent les équations (7), pour une certaine valeur de α, au nouveau système que déterminent les mêmes équations (7) quand α a crû de sa différentielle $d\alpha$. Mais nous supposerons, dans ce qui va suivre, $\alpha = \alpha_0$; le système (7) coïncide alors avec le système donné (10), et les variations δx, δy, δz, ..., $\delta y'$, ... se rapportent à une altération des fonctions de ce système; d'ailleurs cette altération est arbitraire, car le système (7) définit, pour $\alpha = \alpha_1$, un système de fonctions arbitraires, et la différence $\alpha_1 - \alpha_0$ peut être supposée aussi petite que l'on voudra.

Les différentielles deuxièmes

$$\delta^2 x, \ \delta^2 y, \ \ldots, \ \delta^2 y', \ \ldots$$

sont dites les *variations du deuxième ordre* des variables

$$x, \ y, \ \ldots, \ y', \ \ldots;$$

de même

$$\delta^3 x, \ \delta^3 y, \ \ldots, \ \delta^3 y', \ \ldots$$

seront les *variations du troisième ordre*, et ainsi de suite.

Soit généralement

$$\mathrm{V} = \mathrm{F}(x, y, z, \ \ldots, y', z', \ \ldots, y'', \ \ldots)$$

une fonction des variables $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$. Les fonctions $y, z, \ldots$ étant définies par les équations (10), si l'on substitue au système (10) le système (7) avec lequel il coïncide pour $\alpha = \alpha_0$, les différentielles successives de V relatives à α prendront, pour $\alpha = \alpha_0$, des valeurs qui seront précisément les *variations* des ordres successifs de la fonction V.

Les variations n'étant pas autre chose, comme on le voit, que des différentielles, les règles de la différentiation leur sont applicables, et l'on aura, par exemple, l'expression suivante de la variation du premier ordre $\delta\mathrm{V}$:

$$\delta\mathrm{V} = \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\delta y + \ldots + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y''}\delta y'' + \ldots$$

Les considérations que nous venons de présenter sont applicables au cas d'un système de fonctions de plusieurs variables indépendantes ; mais nous ne ferons pas ici cette extension, que ne saurait comporter le plan de cet Ouvrage.

Théorèmes relatifs à la permutation des caractéristiques.

829. Théorème I. — *On peut intervertir l'ordre des opérations exprimées par les caractéristiques d et δ.*

En effet, soit

$$V = F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', \ldots).$$

Les variables x, y, z, ..., y', z', ..., y'', ... étant exprimées en fonction des deux variables t et α, comme on l'a expliqué plus haut, on aura

$$V = f(t, \alpha),$$

où l'on suppose que α a une valeur déterminée α_0. Cela étant, on a, par définition,

$$dV = \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial t}\, dt, \quad \delta V = \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha;$$

les variables t et α étant indépendantes, leurs différentielles dt et $d\alpha$ sont arbitraires et constantes ; si donc on différentie les deux formules précédentes, la première par rapport à α, la deuxième par rapport à t, on aura

$$\delta\, dV = \frac{\partial \dfrac{\partial f(t, \alpha)}{\partial t}}{\partial \alpha}\, dt\, d\alpha, \quad d\,\delta V = \frac{\partial \dfrac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}}{\partial t}\, dt\, d\alpha,$$

et par conséquent (n° 60)

$$\delta\, dV = d\,\delta V,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — *On a, quels que soient les entiers m et n,* $\delta^n d^m V = d^m \delta^n V$.

830. Théorème II. — *On peut intervertir l'ordre des*

opérations exprimées par les caractéristiques $\int$ et δ, quelles que soient les limites entre lesquelles l'intégration doit être effectuée.

En effet, soit

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx;$$

V désigne une fonction donnée

$$V = F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', z'', \ldots)$$

d'une variable indépendante x, de diverses fonctions y, z, ... de x et des dérivées de ces fonctions; elle peut aussi dépendre des valeurs de $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$ aux limites de l'intégration.

On peut exprimer $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$ en fonction des deux variables t et α, mais il faudra supposer à α une valeur déterminée α_0 après la substitution de ces valeurs dans V. Alors, si t_0 et t_1 désignent les valeurs de t qui répondent aux limites x_0 et x_1, on pourra écrire

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt}\right) dt.$$

Maintenant, pour obtenir δS, il faut différentier cette intégrale par rapport à α, et, comme les limites t_0, t_1 sont indépendantes de α, la différentiation pourra être exécutée sous le signe $\int$. On aura ainsi

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta\left(\frac{V\,dx}{dt}\right) dt.$$

Mais, comme dt est une constante, on a $\delta\left(\frac{V\,dx}{dt}\right) = \frac{\delta(V\,dx)}{dt}$; donc

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta(V\,dx)}{dt}\,dt,$$

et, en revenant à la variable indépendante x,

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V\,dx)}{dx}\,dx.$$

On écrit aussi quelquefois

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \delta(V\,dx),$$

en supprimant le facteur dx, qui figure en numérateur et en dénominateur sous le signe $\int$, et en sous-entendant alors que l'intégration est relative à la variable indépendante x. La formule précédente est conforme à l'énoncé du théorème, et elle subsiste quelles que soient les limites x_0 et x_1, qui sont constantes quand la variable x coïncide avec t, mais qui, dans le cas général, varient avec x.

Expressions des variations d'une fonction et de ses dérivées, en fonction de la variation de la variable indépendante et d'une variable nouvelle.

831. Soit y une fonction donnée de la variable x. Posons, comme précédemment,

$$(1) \qquad dy = y'\,dx, \quad dy' = y''\,dx, \quad \ldots,$$

et faisons aussi

$$(2) \qquad \omega = \delta y - y'\,\delta x,$$

d'où

$$\delta y = y'\,\delta x + \omega.$$

Si l'on différentie la première équation (1) avec la caractéristique δ et l'équation précédente avec d, on aura

$$\delta\,dy = \delta y'\,dx + y'\,\delta\,dx,$$
$$d\,\delta y = dy'\,\delta x + y'\,d\,\delta x + d\omega,$$

comme on peut intervertir l'ordre des deux caractéristiques d et δ, la comparaison de ces équations donnera

$$\delta y'\,dx = dy'\,\delta x + d\omega$$

ou, en divisant par dx et en faisant usage de la deuxième équation (1),

$$\delta y' = y''\,\delta x + \frac{d\omega}{dx}.$$

Pareillement, si l'on différentie la deuxième équation (1) avec la δ et l'équation précédente avec la d, on aura

$$\delta dy' = \delta y''\,dx + y''\,\delta dx,$$
$$d\delta y' = dy''\,\delta x + y''\,d\delta x + d\,\frac{d\omega}{dx},$$

d'où

$$\delta y''\,dx = dy''\,\delta x + d\,\frac{d\omega}{dx}$$

ou, en divisant par dx,

$$\delta y'' = y'''\,\delta x + \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Il est évident qu'en continuant ainsi on formera équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta y = y'\,\delta x + \omega,\\ \delta y' = y''\,\delta x + \dfrac{d\omega}{dx},\\ \delta y'' = y'''\,\delta x + \dfrac{d^2\omega}{dx^2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots,\\ \delta y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\delta x + \dfrac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

qui permettent d'exprimer les variations δy, $\delta y'$, $\delta y''$, ... par les seules quantités δx et ω.

832. Au moyen de ces formules, on peut obtenir une expression très-simple de la variation d'une fonction quelconque de x, de y et des dérivées y', y'', ... Soit

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}), \tag{4}$$

et désignons par

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'\,dy' + \ldots + Y^{(n)}\,dy^{(n)} \tag{5}$$

la différentielle totale de V; on aura (n° 828)

$$\delta V = X\,\delta x + Y\,\delta y + Y'\,\delta y' + \ldots + Y^{(n)}\,\delta y^{(n)}. \tag{6}$$

Si l'on retranche les équations (5) et (6) l'une de l'autre après avoir multiplié la première par $\frac{\delta x}{dx}$, il viendra

$$\delta V - dV\frac{\delta x}{dx} = Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x) + \ldots + Y^{(n)}(\delta y^{(n)} - y^{(n+1)}\delta x)$$

ou, à cause des formules (3),

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + Y''\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots + Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}. \tag{7}$$

Si la fonction V contient d'autres fonctions de x, savoir : z, u, ..., avec leurs dérivées z', u', ..., z'', u'', ..., il faudra ajouter au second membre de la formule (5) les termes nouveaux

$$Z\,dz + Z'\,dz' + \ldots + U\,du + U'\,du' + \ldots$$

et au second membre de la formule (6) les termes analogues

$$Z\,\delta z + Z'\,\delta z' + \ldots + U\,\delta u + U'\,\delta u' + \ldots;$$

alors, si l'on pose

$$\varpi = \delta z - z'\delta x, \quad \chi = \delta u - u'\delta u, \quad \ldots,$$

il est évident que la formule (7) continuera à donner la variation δV, pourvu que l'on ajoute au second membre les termes

$$Z\varpi + Z'\frac{d\varpi}{dx} + \ldots + U\chi + U'\frac{d\chi}{dx} + \ldots.$$

Calcul de la variation d'une intégrale définie.

833. Proposons-nous de déterminer la variation de l'intégrale définie

$$(1) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx.$$

Nous supposerons d'abord que V soit indépendant des limites x_0, x_1, qui sont, en général, variables avec α, et qu'elle ne renferme qu'une seule fonction y de x; ainsi l'on aura

$$(2) \qquad V = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

En différentiant l'équation (1) avec la δ, on a (n° 830)

$$(3) \qquad \delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V\,dx)}{dx}\,dx;$$

d'ailleurs, comme on peut intervertir l'ordre des différentiations par d et δ,

$$\delta(V\,dx) = \delta V\,dx + V\,d\,\delta x;$$

on a aussi (n° 832)

$$\delta V = dV\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + \ldots + Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}$$

en posant

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'\,dy' + \ldots + Y^{(n)}\,dy^{(n)}$$

et

$$\omega = \delta y - y'\,\delta x.$$

On conclut de là

$$(4)\quad \delta(V\,dx) = d(V\,\delta x) + \left(Y\omega + Y'\frac{d\omega}{dx} + \ldots + Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}\right)dx;$$

et, par conséquent, la formule (3) donnera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \delta S = &\int_{x_0}^{x_1} \frac{d(V\,\delta x)}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x_1} Y\omega\,dx + \int_{x_0}^{x_1} Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} Y''\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x_1} Y^{(n)}\frac{d^n\omega}{dx^n}\,dx. \end{aligned}\right.$$

La première des intégrales contenues dans cette formule est égale à la différence des valeurs que prend le produit $V\,\delta x$ aux limites de l'intégrale; parmi les intégrales qui suivent, celles qui dépendent des dérivées de ω peuvent être transformées, au moyen de l'intégration par parties, en d'autres où ne figure que la seule quantité ω. On a effectivement

$$\begin{aligned} &\int Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx = Y'\omega - \int \frac{dY'}{dx}\,\omega\,dx, \\ &\int Y''\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx = Y''\frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx}\,\omega + \int \frac{d^2Y''}{dx^2}\,\omega\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où, en prenant x_0 et x_1 pour limites,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} Y'\frac{d\omega}{dx}\,dx = \Big[Y'\omega\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dY'}{dx}\,\omega\,dx, \\ &\int_{x_0}^{x_1} Y''\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx = \left[Y''\frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx}\,\omega\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2Y''}{dx^2}\,\omega\,dx, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$(7)\quad K = Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots + (-1)^n\frac{d^nY^{(n)}}{dx^n}$$

et

$$(8)\quad \begin{cases} \Gamma = V\delta x + \left(Y' - \dfrac{dY''}{dx} + \dfrac{d^2 Y'''}{dx^2} - \ldots\right)\omega + \left(Y'' - \dfrac{dY'''}{dx} + \ldots\right)\dfrac{d\omega}{dx} \\ \quad + \left(Y''' - \ldots\right)\dfrac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots + Y^{(n)}\dfrac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}, \end{cases}$$

puis que l'on désigne par Γ_0, Γ_1 les valeurs que prend Γ aux limites de l'intégration, l'expression (5) de δS deviendra, à cause des formules (6),

$$(9)\qquad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx.$$

Si l'on remplace ω, $\dfrac{d\omega}{dx}$, $\dfrac{d^2\omega}{dx^2}$, ... par leurs valeurs $\delta y - y'\delta x$, $\delta y' - y''\delta x$, $\delta y'' - y'''\delta x$, ..., l'expression (8) de Γ deviendra

$$(10)\quad \begin{cases} \Gamma = \Big[V - \left(Y' - \dfrac{dY''}{dx} + \dfrac{d^2Y'''}{dx^2} - \ldots\right)y' \\ \qquad - \left(Y'' - \dfrac{dY'''}{dx} + \ldots\right)y'' - (Y''' - \ldots)y''' - \ldots\Big]\delta x \\ \quad + \left(Y' - \dfrac{dY''}{dx} + \dfrac{d^2Y'''}{dx^2} - \ldots\right)\delta y \\ \quad + \left(Y'' - \dfrac{dY'''}{dx} + \ldots\right)\delta y' + \left(Y''' - \ldots\right)\delta y'' + \ldots + Y^{(n)}\delta y^{(n-1)}. \end{cases}$$

834. Nous avons supposé qu'il n'entrait dans l'expression de V qu'une seule fonction y de x, avec quelques-unes de ses dérivées; mais il est évident que le calcul de la variation δS se fera exactement de la même manière si V renferme d'autres fonctions z, u, ..., avec leurs dérivées z', z'', ..., $z^{(p)}$, u', u'', ..., $u^{(q)}$, ... En effet, si l'on pose, comme au n° 832,

$$\varpi = \delta z - z'\delta x, \quad \chi = \delta u - u'\delta x, \quad \ldots,$$

il est évident que la formule (4) continuera à donner la

variation $\delta(V\,dx)$, pourvu que l'on ajoute au second membre les termes

$$\left(Z\varpi + Z'\frac{d\varpi}{dx} + \ldots + Z^{(p)}\frac{d^p\varpi}{dx^p}\right) + \left(U\chi + U'\frac{d\chi}{dx} + \ldots + U^{(q)}\frac{d^q\chi}{dx^q}\right) + \ldots,$$

analogues à ceux qui dépendent de ω. En appliquant à ces nouveaux termes le procédé que nous avons employé, on trouve cette expression de δS,

$$(11)\quad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) - \int_{x_0}^{x_1}(K\omega + H\varpi + G\chi + \ldots)\,dx,$$

où K désigne la quantité définie par la formule (7) et où l'on fait de plus

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} H = Z - \dfrac{dZ'}{dx} + \dfrac{d^2Z''}{dx^2} - \ldots + (-1)^p\dfrac{d^pZ^{(p)}}{dx^p}, \\ G = U - \dfrac{dU'}{dx} + \dfrac{d^2U''}{dx^2} - \ldots + (-1)^q\dfrac{d^qU^{(q)}}{dx^q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En outre, Γ_0, Γ_1 désignent toujours les valeurs que prend Γ aux limites de l'intégration, c'est-à-dire les valeurs qui répondent respectivement à $x = x_0$ et à $x = x_1$; mais à l'expression générale de Γ donnée par la formule (10) il faut ajouter de nouveaux termes, savoir ceux qu'on déduit des termes déjà écrits et qui renferment les lettres Y, y, en remplaçant respectivement ces lettres par Z, z, puis par U, u, etc.

835. Enfin il nous reste à examiner le cas où la fonction V dépend des valeurs de x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, z, z', z'', ..., $z^{(p-1)}$, ... aux limites de l'intégrale.

Dans ce cas, la variation de $V\,dx$ se composera de deux parties, savoir celle que l'on obtient sans faire varier les quantités qui se rapportent aux limites et celles que l'on obtient en ne faisant varier que ces seules quantités.

Nous avons considéré la première partie aux numéros précédents, et, si l'on représente par la caractéristique δ' les variations relatives aux seules limites, la seconde partie sera $\delta'(V\,dx)$ ou $\delta' V\,dx$. Il suffira donc d'ajouter à l'expression (11) de δS le terme

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \delta' V\,dx.$$

On a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \delta' V = {} & \frac{\partial V}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial V}{\partial y'_0}\delta y'_0 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_0^{(n-1)}}\delta y_0^{(n-1)} + \frac{\partial V}{\partial z_0}\delta z_0 + \ldots \\ & + \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial V}{\partial y'_1}\delta y'_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_1^{(n-1)}}\delta y_1^{(n-1)} + \frac{\partial V}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

d'où, en intégrant,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} A = {} & \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0}dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0}dx + \ldots + \delta y_0^{(n-1)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0^{(n-1)}}dx + \delta z_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_0}dx + \ldots \\ & + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}dx + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_1}dx + \ldots + \delta y_1^{(n-1)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_1^{(n-1)}}dx + \delta z_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_1}dx + \ldots; \end{aligned}\right.$$

si donc on fait, pour abréger,

$$(15)\qquad \mathcal{G} = \Gamma_1 - \Gamma_0 + A,$$

l'expression complète de δS sera

$$(16)\qquad \delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\varpi + G\chi + \ldots)\,dx,$$

et l'on voit que les termes introduits dans $\mathcal{G}$ par A sont de même forme que ceux qui existaient déjà.

Autre manière de calculer la variation d'une intégrale définie.

836. Au lieu d'appliquer la formule générale que nous avons obtenue au numéro précédent, il est souvent préférable, dans les applications, de procéder à une recherche

directe. On peut alors se dispenser d'introduire, comme nous l'avons fait, les quantités ω, ϖ, ..., en dirigeant le calcul comme il suit. L'intégrale proposée étant

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

on a, comme on l'a vu,

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V\,dx)}{dx}\,dx;$$

mais nous écrirons simplement

$$\delta S = \int \delta(V\,dx),$$

sans désigner la variable par rapport à laquelle se fait l'intégration, les valeurs que prend cette variable quand on a $x = x_0$, $x = x_1$ devant être prises pour limites de l'intégrale.

Cela posé, V est une fonction de $x, y, y', \ldots, z, z', \ldots$; mais nous introduirons, au lieu des dérivées $y', y'', \ldots, z', \ldots$, les différentielles des variables $x, y, z, \ldots$, la variable indépendante étant le paramètre t, dont la variation est nulle. Comme on a

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \quad \ldots, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad \ldots,$$

$V\,dx$ deviendra une fonction de $x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$; en différentiant ce produit avec la caractéristique δ et en remarquant qu'on peut intervertir l'ordre des opérations exprimées par d et δ, on aura un résultat de cette forme :

$$\begin{aligned}\delta(V\,dx) = {} & X_0\,\delta x + X_1\,d\,\delta x + X_2\,d^2\delta x + \ldots \\ & + Y_0\,\delta y + Y_1\,d\,\delta y + Y_2\,d^2\delta y + \ldots \\ & + Z_0\,\delta z + Z_1\,d\,\delta z + Z_2\,d^2\delta z + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les différentiations exprimées par d se rapportent à la variable t, et l'intégration par parties donne

$$\int X_1\, d\,\delta x = X_1\,\delta x - \int dX_1\,\delta x,$$

$$\int X_2\, d^2\delta x = X_2\, d\,\delta x - dX_2\,\delta x + \int d^2 X_2\,\delta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int Y_1\, d\,\delta y = Y_1\,\delta y - \int dY_1\,\delta y,$$

$$\int Y_2\, d^2\delta y = Y_2\, d\,\delta y - dY_2\,\delta y + \int d^2 Y_2\,\delta y,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent, si l'on pose

$$X = X_0 - dX_1 + d^2 X_2 - \ldots,$$
$$Y = Y_0 - dY_1 + d^2 Y_2 - \ldots,$$
$$Z = Z_0 - dZ_1 + d^2 Z_2 - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma = {} & (X_1 - dX_2 + \ldots)\delta x + (X_2 - \ldots)\delta\, dx + \ldots\\ & + (Y_1 - dY_2 + \ldots)\delta y + (Y_2 - \ldots)\delta\, dy + \ldots\\ & + (Z_1 - dZ_2 + \ldots)\delta z + (Z_2 - \ldots)\delta\, dz + \ldots,\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

puis qu'on représente par Γ_0, Γ_1 les valeurs de Γ aux limites, pour lesquelles on a respectivement $x = x_0$, $y = y_0$, ... et $x = x_1$, $y = y_1$, ..., on aura

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots),$$

et, si x est la variable par rapport à laquelle s'exécute l'intégration, on devra écrire

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \ldots}{dx}\, dx.$$

Nous avons supposé ici que la fonction V est indépendante des valeurs que prennent les variables aux limites; mais, si le contraire a lieu, il suffira d'ajouter à l'expression précédente de δS les nouveaux termes dont nous avons fait le calcul au n° 835.

La formule précédente coïncidera avec celle du n° 835, si l'on y remplace δy, δz, ... par les expressions

$$\frac{dy}{dx}\delta x + \omega, \quad \frac{dz}{dx}\delta x + \varpi, \quad \ldots;$$

par cette substitution, la quantité $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \ldots$ se réduit à

$$(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots)\frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Z\varpi + \ldots;$$

il en résulte que l'on a identiquement

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \ldots = 0$$

et que Y, Z, ... ne sont autre chose que les quantités désignées par K, H, ... au numéro cité.

837. Nous avons calculé la variation de l'intégrale définie S dans l'hypothèse la plus générale et en supposant une altération quelconque dans le système des fonctions de x que nous avons désignées par y, z, ... Si l'on suppose que la variable x coïncide avec la variable t, dont la variation est nulle, les limites x_0, x_1 seront constantes, et l'on aura généralement $\delta x = 0$. Alors les quantités désignées par ω, ϖ, ... ne sont autre chose que les variations δy, δz, ... L'expression de δS se réduit alors à

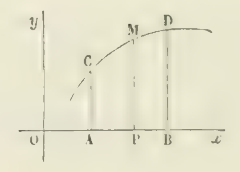
$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y\delta y + Z\delta z + \ldots}{dx}\,dx.$$

Objet de la méthode des variations.

838. La méthode des variations a été imaginée par Lagrange, dans le but de résoudre certains problèmes de maxima et de minima d'une nature particulière; mais elle peut être employée avec avantage dans d'autres questions diverses. Dans les problèmes de maxima et de minima dont je viens de parler il s'agit de déterminer des fonctions d'une variable indépendante, de manière à rendre maximum ou minimum une certaine intégrale définie où figurent ces fonctions. Quelques problèmes de ce genre avaient été résolus avant Lagrange; en voici un exemple :

Trouver une courbe plane CMD *qui passe par deux points donnés* C, D *et qui soit telle que l'aire engendrée par l'arc* CD *en tournant autour d'un axe situé dans son plan soit un minimum.*

Si l'on choisit deux axes rectangulaires Ox, Oy dont le premier coïncide avec l'axe de révolution, que l'on



mène les ordonnées CA, DB des extrémités C, D, et que l'on fasse $OA = x_0$, $OB = x_1$, la surface engendrée par l'arc de courbe CD sera égale à $2\pi S$, en désignant par S l'intégrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx.$$

Il s'agit donc ici de trouver quelle est la fonction de x qu'il faut substituer à y pour que la valeur de S soit un minimum.

Au lieu de se donner les extrémités C et D de l'arc demandé, on peut supposer que ces points soient seulement assujettis à la condition d'être situés sur deux courbes données; la question se ramènera encore à trouver le minimum de l'intégrale S, mais ici les limites x_0, x_1 ne seront plus données.

Recherche des valeurs maxima et minima d'une intégrale définie.

839. Soit l'intégrale définie

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

où l'on suppose

$$V = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', \ldots, z^{(p)}, \ldots),$$

y, z, ... étant des fonctions de x, et y', y'', ..., z', ... désignant comme précédemment les dérivées de ces fonctions. La fonction V peut dépendre aussi des valeurs que prennent les variables aux limites de l'intégrale; quant à ces limites, elles sont données ou assujetties à certaines conditions. Cela posé, il s'agit de déterminer les fonctions y, z, ... qui répondent à un maximum ou à un minimum de S.

Le système des fonctions qu'il faut trouver et tel autre système aussi peu différent du premier que l'on voudra peuvent être compris, comme on l'a vu, dans un système plus général, qui dépend d'un paramètre α. Dans ce dernier système, toutes les variables x, y, z, ... ainsi que les dérivées y', y'', ..., z', ... sont exprimées en fonction d'une variable nouvelle t et du paramètre α, et

la même chose a lieu pour les valeurs particulières que prennent les mêmes variables aux limites, lesquelles dépendront des limites t_0, t_1 de t et du paramètre α. Après la substitution des valeurs de $x, y, \ldots$, l'expression de S deviendra

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

ce qui se réduit à une simple fonction du paramètre α.

Ainsi l'on se trouve ici dans le cas ordinaire du maximum et du minimum. La condition nécessaire pour le maximum et pour le minimum est que la dérivée $\frac{dS}{d\alpha}$ ou la différentielle $\frac{dS}{d\alpha} d\alpha$ soit nulle : or, cette différentielle n'est autre chose que la variation de S; donc la condition dont nous parlons est simplement

$$\delta S = 0.$$

Mais on sait qu'elle n'est pas suffisante. Il faut en outre, pour le maximum, que $\frac{d^2 S}{d\alpha^2}$ ou $\frac{d^2 S}{d\alpha^2} d\alpha^2$ soit négative et, pour le minimum, que la même différentielle soit positive; cette différentielle est précisément la variation du deuxième ordre $\delta^2 S$; donc il faut que l'on ait

$$\delta^2 S < 0$$

pour le maximum et

$$\delta^2 S > 0$$

pour le minimum. Dans le cas de $\delta^2 S = 0$, il faudrait pour le maximum et pour le minimum que l'on eût aussi $\delta^3 S = 0$. Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion, qui n'a pas d'objet, car, dans la plupart des cas, on sait, par la nature de la question à résoudre, s'il y a réellement maximum ou minimum. Aussi nous borne-

rons-nous à étudier la condition $\delta S = 0$ commune au maximum ou au minimum.

840. Cas où V ne contient qu'une seule fonction y de x. — Alors on a, dans l'hypothèse la plus générale, d'après la formule (16) du n° 835,

$$\delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx.$$

La condition $\delta S = 0$ exige que l'on ait séparément

$$\mathcal{G} = 0, \quad K = 0.$$

En effet, supposons que l'on ait fixé les variations relatives aux limites. Comme la *déformation* qui résulte des variations du paramètre α est entièrement arbitraire, la fonction ω est elle-même arbitraire, et, si K n'est pas nul, on peut choisir ω de manière que, pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1, elle ait constamment le signe de K ou constamment un signe contraire à celui de K. Alors l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx$ aura une valeur différente de zéro, et elle sera positive ou négative à volonté; par conséquent, quelque valeur que l'on suppose à $\mathcal{G}$, on pourra faire en sorte que δS ne soit pas nulle. La condition du maximum et du minimum exige donc que l'on ait

$$K = 0, \tag{1}$$

et il en résulte nécessairement qu'on doit avoir aussi

$$\mathcal{G} = 0. \tag{2}$$

Soient

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

et

$$dV = X\, dx + Y\, dy + Y'\, dy' + \ldots + Y^{(n)}\, dy^{(n)};$$

l'équation (1) pourra être mise (n° 833) sous la forme

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nY^{(n)}}{dx^n} = 0. \tag{3}$$

C'est, comme on voit, une équation différentielle dont l'ordre sera en général $2n$, et son intégrale renfermera $2n$ constantes arbitraires. Supposons qu'on ait trouvé cette intégrale et représentons-la par

$$(4) \qquad y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n});$$

l'équation (4) fera connaître la fonction inconnue y, et il n'y aura plus qu'à déterminer les $2n$ constantes C_1, C_2, ..., C_{2n} de manière à satisfaire à la condition (2). Il faut, à cet égard, distinguer plusieurs cas.

1° Si les valeurs $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}, x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$ relatives aux limites sont données, les variations de ces quantités seront nulles et l'équation (2) sera satisfaite d'elle-même. Différentions n fois l'équation (4); nous aurons des résultats de cette forme :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = f^{(1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ y'' = f^{(2)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}). \end{array} \right.$$

Remplaçant alors, dans les équations (4) et (5), $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ d'abord par $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, puis par $x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$, on aura un système de $2n$ équations, savoir :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = f(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ y'_0 = f^{(1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_0^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ y_1 = f(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ y'_1 = f^{(1)}(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \end{array} \right.$$

qui serviront à déterminer les $2n$ arbitraires.

2° Si l'on donne seulement les valeurs de quelques-unes des $2n$ quantités $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}, x_1, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$, ou, plus généralement, si l'on donne i équations

$$(7) \qquad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad \ldots, \quad M_i = 0$$

auxquelles ces quantités doivent satisfaire, on différentiera ces équations avec la caractéristique δ; les équations résultantes

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial M_1}{\partial y_0}\delta y_0 + \ldots + \frac{\partial M_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial M_i}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial M_i}{\partial y_0}\delta y_0 + \ldots + \frac{\partial M_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots = 0$$

permettront d'exprimer i variations en fonction des $2n + 2 - i$ autres; on portera les valeurs de ces i variations dans l'équation (2), et, comme les variations restantes sont arbitraires, il faudra égaler à zéro leurs coefficients. On obtiendra ainsi $2n + 2 - i$ équations, qui, réunies aux équations (6) et (7), compléteront le nombre $4n + 2$ d'équations nécessaires pour déterminer les $2n$ arbitraires et les $2n + 2$ quantités relatives aux limites.

3° Si aucune relation n'est donnée entre les quantités aux limites, les variations de ces quantités resteront arbitraires et l'équation (2) se décomposera en $2n + 2$ équations distinctes; ces équations suffiront, avec les $2n$ équations (6), pour déterminer les $4n + 2$ inconnues. Ce cas est compris dans le précédent, en supposant le nombre i réduit à zéro.

Remarque. — Il peut se faire que l'ordre de l'équation (3) s'abaisse au-dessous de $2n$, et cela arrivera nécessairement si V est linéaire par rapport à la dérivée $y^{(n)}$; ce cas ne saurait offrir de difficultés, et nous laissons au lecteur le soin d'examiner les modifications qu'il exige.

841. Cas où V contient plusieurs fonctions de x. — Nous allons considérer maintenant le cas où V renferme μ fonctions y, z, u, ... de x, avec quelques-unes de leurs dérivées, et nous supposerons d'abord qu'il n'existe aucune relation donnée entre les fonctions y, z, u, ... et la variable indépendante x. Alors la variation de l'intégrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

sera (n° 835)

$$\delta S = \mathcal{G} + \int_{x_1}^{x_0} (K\omega + H\varpi + G\chi + \ldots)\,dx,$$

et je dis que la condition $\delta S = 0$ exige que l'on ait séparément

$$K = 0, \quad H = 0, \quad G = 0, \quad \ldots$$

et

$$\mathcal{G} = 0.$$

En effet, supposons que K, H, G, ... ne soient pas toutes nulles et que l'on ait fixé les variations aux limites; les fonctions ω, ϖ, χ, ... étant arbitraires, on peut les choisir de manière que pour chaque valeur de x comprises entre x_0 et x_1 elles soient respectivement de même signe que K, H, G, ..., ou, si l'on veut, de signe contraire à K, H, G, ... Alors l'intégrale qui figure dans l'expression de δS aura une valeur différente de zéro et dont le signe peut être pris à volonté; il en résulte qu'on pourra toujours faire en sorte que δS ne soit pas nulle. Ainsi l'on doit avoir

$$K = 0, \quad H = 0, \quad G = 0, \quad \ldots,$$

et par suite aussi

$$\mathcal{G} = 0.$$

Les premières équations constituent un système d'é-

quations simultanées dont on devra d'abord chercher les intégrales. Il faudra ensuite satisfaire à l'équation $\mathcal{G}=0$, et déterminer les arbitraires introduites par l'intégration, ainsi que les quantités aux limites, si celles-ci ne sont pas données; cette recherche n'offre aucune difficulté, après ce que nous avons dit au numéro précédent; la marche à suivre est en effet exactement la même.

842. Il nous reste à examiner le cas où V renferme plusieurs fonctions y, z, u, ... de x, liées à la variable par une ou plusieurs équations données. Soit

$$\Phi(x, y, z, u, \ldots) = 0$$

une telle équation. En la différentiant avec la caractéristique δ, puis avec la d, on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\delta u + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi}{\partial u}du + \ldots = 0;$$

si l'on retranche ces équations l'une de l'autre après avoir multiplié la seconde par $\frac{\delta x}{dx}$ et en se rappelant que l'on a

$$\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x = \omega, \quad \delta z - \frac{dz}{dx}\delta x = \varpi, \quad \ldots,$$

il viendra

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\omega + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\varpi + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\chi + \ldots = 0.$$

Ainsi, à chaque équation donnée entre x, y, z, u, ... répond une équation linéaire entre ω, ϖ, χ, ... Si le nombre de ces équations est égal à i, on pourra exprimer i des quantités ω, ϖ, χ, ... en fonction des $\mu - i$ autres, et, en substituant les valeurs trouvées dans l'expression

de ∂S, il viendra

$$\partial S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} (K'\omega + H'\varpi + G'\chi + \ldots)\, dx.$$

Les $\mu - i$ fonctions restantes ω, ϖ, χ, ... étant arbitraires, le raisonnement du numéro précédent montre que l'on a

$$K' = 0, \quad H' = 0, \quad G' = 0, \quad \ldots,$$

avec

$$\mathcal{G} = 0.$$

Les premières équations, jointes aux i équations données $\Phi(x, y, z, u, \ldots) = 0, \ldots$, constituent un système de μ équations simultanées qu'il faudra intégrer. L'équation $\mathcal{G} = 0$ servira ensuite à déterminer les arbitraires et à achever, s'il y a lieu, la détermination des quantités aux limites.

Supposons que la fonction V ne renferme que deux fonctions y, z liées à x par la relation

$$\Phi(x, y, z) = 0;$$

on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\varpi = 0, \quad \text{d'où} \quad \varpi = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}\omega,$$

puis

$$\partial S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K\frac{\partial \Phi}{\partial z} - H\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}\,\omega\, dx;$$

les conditions du maximum et du minimum seront donc

$$K\frac{\partial \Phi}{\partial z} - H\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = 0.$$

D'une classe particulière de maxima et de minima relatifs.

843. Après avoir montré comment on peut trouver les conditions du maximum ou du minimum d'une intégrale définie

$$(1) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

quand on ne s'impose aucune restriction, nous avons considéré le cas où les variables qui figurent dans la fonction V sont liées entre elles par des équations données. Il peut arriver aussi que les équations de condition renferment soit des dérivées des fonctions inconnues, soit une ou plusieurs intégrales définies. Il n'entre pas dans notre plan de développer la solution générale de cette question; il nous suffira de traiter le cas le plus simple, celui dans lequel on se propose de rendre maximum ou minimum l'intégrale S, en imposant la condition nouvelle qu'une deuxième intégrale définie

$$(2) \qquad S' = \int_{x_0}^{x_1} V'\,dx$$

ait une valeur donnée l. Dans ce nouveau problème, qui se ramène sans difficulté à celui du n° 840, il s'agit de trouver les conditions d'un maximum relatif ou d'un minimum relatif.

Nous raisonnerons ici comme au n° 839; le système des fonctions inconnues et tel autre système aussi peu différent du premier que l'on voudra peuvent être compris dans un système plus général qui renferme un paramètre α. De plus, dans ce système, toutes les variables s'expriment par une même variable t indépendante de α,

et alors on a

$$S = \int_{t_0}^{t_1} V \frac{dx}{dt} dt, \quad S' = \int_{t_0}^{t_1} V' \frac{dx}{dt} dt$$

en sorte que S et S′ sont des fonctions de α. Mais la seconde de ces fonctions doit se réduire à une constante, puisque l'intégrale S′ doit conserver la même valeur dans le passage d'un système de fonctions à un autre; on aura donc $\frac{dS'}{d\alpha} = 0$; d'ailleurs la condition du maximum ou du minimum sera $\frac{dS}{d\alpha} = 0$, comme au n°839; ainsi l'on aura

$$(3) \qquad \delta S = 0, \quad \delta S' = 0.$$

844. Supposons d'abord que V et V′ ne renferment qu'une seule fonction y de la variable x; les expressions de δS et de $\delta S'$ pourront être mises (n° 833) sous la forme

$$(4) \qquad \delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx, \quad \delta S' = \mathcal{G}' + \int_{x_0}^{x_1} K'\omega\, dx,$$

$\mathcal{G}'$, K′ désignant des quantités analogues à $\mathcal{G}$, K respectivement. Posons, avec Cauchy,

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x} K'\omega\, dx = \varphi(x);$$

on aura, en différentiant,

$$(6) \qquad K'\omega = \varphi'(x), \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'}.$$

Comme $\varphi(x_0)$ est nulle d'après la formule (5), l'expression de $\delta S'$ sera

$$(7) \qquad \delta S' = \mathcal{G}' + \varphi(x_1),$$

et celle de δS deviendra, en remplaçant ω par sa

valeur (6),

$$\delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'} \varphi'(x)\, dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{K}{K'} \varphi'(x)\, dx = \frac{K}{K'} \varphi(x) - \int \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x)\, dx;$$

par conséquent, si l'on désigne par K_1, K'_1 les valeurs de K et de K' pour $x = x_1$, on aura, à cause de $\varphi(x_0) = 0$,

$$(8) \qquad \delta S = \mathcal{G} + \frac{K_1}{K'_1} \varphi(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x)\, dx.$$

La fonction $\varphi(x)$ est entièrement arbitraire; elle est assujettie seulement, par sa définition, à s'annuler pour $x = x_0$.

Cela posé, on voit, par la formule (7), que la condition $\delta S' = 0$ équivaut à

$$\varphi(x_1) = -\mathcal{G}',$$

ce qui réduit la formule (8) à

$$\delta S = \left(\mathcal{G} - \frac{K_1}{K'_1} \mathcal{G}'\right) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x)\, dx.$$

La fonction $\varphi(x)$ pouvant être choisie à volonté, le raisonnement dont nous avons fait usage au n° 840 montre que la condition $\delta S = 0$ exige

$$(9) \qquad \mathcal{G} - \frac{K_1}{K'_1} \mathcal{G}' = 0, \quad \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} = 0.$$

La seconde de ces équations donne, par l'intégration,

$\frac{K}{K'} = -a$ ou

$$K + aK' = 0, \tag{10}$$

a étant une constante arbitraire; la première équation (9) devient ensuite

$$\mathcal{G} + a\mathcal{G}' = 0. \tag{11}$$

Les équations (10) et (11) sont les conditions demandées du maximum relatif ou du minimum relatif; on voit qu'elles sont aussi les conditions du maximum absolu ou du minimum absolu de l'intégrale

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (V + aV')\,dx, \tag{12}$$

en sorte que le problème dont nous nous occupons se trouve ramené à celui qui a été résolu au n° 840. A la vérité, nous avons ici une constante arbitraire a de plus; mais nous avons aussi une équation nouvelle, savoir $S' = l$.

845. L'analyse précédente s'applique sans modifications au cas où V et V' renferment plusieurs fonctions y, z, ... de la variable indépendante x. On a effectivement

$$\delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\varpi + \ldots)\,dx,$$

$$\delta S' = \mathcal{G}' + \int_{x_0}^{x_1} (K'\omega + H'\varpi + \ldots)\,dx.$$

Posons

$$\int_{x_0}^{x} (K'\omega + H'\varpi + \ldots)\,dx = \varphi(x),$$

d'où

$$K'\omega + H'\varpi + \ldots = \varphi'(x), \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'} - \frac{H'}{K'}\varpi - \ldots;$$

on aura $\varphi(x_0) = 0$, et la condition $\delta S' = 0$ donnera $\varphi(x_1) = -\mathcal{G}'$; en outre, l'expression de δS deviendrait

$$\delta S = \mathcal{G} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{K}{K'} \varphi'(x) + \left(H - \frac{KH'}{K} \right) \varpi + \ldots \right] dx;$$

d'ailleurs, l'intégration par parties donne, à cause de $\varphi(x_1) = -\mathcal{G}'$,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'} \varphi'(x)\, dx = -\frac{K_1}{K'_1} \mathcal{G}' - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x)\, dx,$$

et il en résulte

$$\delta S = \left(\mathcal{G} - \frac{K_1}{K'_1} \mathcal{G}' \right) + \int_{x_0}^{x_1} \left[-\frac{d\frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) + \left(H - \frac{KH'}{K'} \right) \varpi + \ldots \right] dx.$$

Les fonctions $\varphi(x)$, ϖ, ... étant arbitraires, la condition δS exige

$$\frac{d\frac{K}{K'}}{dx} = 0, \quad \frac{H}{H'} = \frac{K}{K'}, \quad \ldots,$$

avec

$$\mathcal{G} - \frac{K}{K'} \mathcal{G}' = 0.$$

La première de ces équations donne $\frac{K}{K'} =$ une constante $-a$; par conséquent, les conditions du maximum ou du minimum relatif dont nous nous occupons seront

$$K + aK' = 0, \quad H + aH' = 0, \quad \ldots,$$

avec

$$\mathcal{G} + a\mathcal{G}' = 0;$$

ce sont bien les conditions du maximum absolu ou du minimum absolu de l'intégrale $S + aS'$.

Remarques sur quelques cas particuliers.

846. Les cas des maxima ou des minima relatifs se ramenant à celui du maximum ou du minimum absolu, nous ne considérerons ici que ce dernier cas.

Reprenons la formule

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

et supposons que V ne renferme qu'une seule fonction y de x avec ses deux premières dérivées y', y''. Si l'on pose

$$V = f(x, y, y', y'')$$

et

$$dV = X\,dx + Y\,dy + Y'\,dy' + Y''\,dy'',$$

la fonction inconnue y dépendra de l'équation différentielle

$$(1) \qquad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} = 0,$$

qui sera, en général, du quatrième ordre. Nous allons indiquer quelques cas généraux dans lesquels on peut effectuer immédiatement une ou deux intégrations.

1° Si V ne renferme pas y et que l'on ait, en conséquence,

$$V = f(x, y', y''),$$

Y sera nulle, et alors l'équation (1) se réduit à

$$-\frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} = 0;$$

en intégrant et en désignant par C une constante, il vient

$$(2) \qquad -Y' + \frac{dY''}{dx} = C,$$

ce qui est une équation du troisième ordre, en général.

On peut opérer de la même manière lorsque V renferme un terme du premier degré en y, car, dans ce cas, Y est constant, et, en intégrant l'équation (1), on a

$$Yx - Y' + \frac{dY''}{dx} = C.$$

2° Supposons que V ne renferme pas x et que l'on ait

$$V = f(y, y', y'').$$

Si l'on résout l'équation identique

$$dV = Y\,dy + Y'\,dy' + Y''\,dy''$$

par rapport à Y, et qu'on porte la valeur obtenue dans l'équation (1), celle-ci deviendra

$$dV - \left(Y'\,dy' + \frac{dY'}{dx}\,dy\right) + \left(\frac{d^2Y''}{dx^2}\,dy - Y''\,dy''\right) = 0,$$

ou, à cause de $dy = y'\,dx$, $dy' = y''\,dx$,

$$dV - \left(Y'\,\frac{dy'}{dx} + y'\,\frac{dY'}{dx}\right)dx + \left(y'\,d\frac{dY''}{dx} - Y''\,d\frac{dy'}{dx}\right) = 0;$$

le premier membre de cette équation est une différentielle exacte ; en l'intégrant et en désignant par C la constante, on a

$$(3) \qquad V - y'\left(Y' - \frac{dY''}{dx}\right) - Y''y'' = C,$$

équation différentielle qui est, en général, du troisième ordre.

3° Supposons que V ne renferme ni x ni y, et que l'on ait

$$V = f(y', y'').$$

On se trouve à la fois dans les deux cas que nous venons d'examiner, et, à cause de Y = 0, on aura ces deux in-

tégrales premières de l'équation (1),

$$-Y' + \frac{dY''}{dx} = C', \quad V - y'\left(Y' - \frac{dY''}{dx}\right) - Y''y'' = C,$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. L'élimination de $\frac{dY''}{dx}$, qui, en général, contient seule la dérivée de y dont l'ordre est le plus élevé, donnera donc l'intégrale seconde

$$(4) \qquad V = Y''y'' + C'y' + C.$$

Application de la méthode des variations à la solution de quelques problèmes.

847. Problème I. — *Trouver la ligne la plus courte entre deux points.*

Soient x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 les coordonnées des extrémités de la ligne demandée par rapport à trois axes rectangulaires. La longueur de cette ligne sera

$$(1) \quad S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

On a donc ici, en conservant toutes les notations dont nous avons fait usage précédemment,

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad dV = \frac{y'\,dy' + z'\,dz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

puis

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Les équations qui déterminent les fonctions inconnues, savoir $K = 0$, $H = 0$, sont

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$Y' = \text{const.}, \quad Z' = \text{const.},$$

et par suite

$$y' = C, \quad z' = C';$$

on tire de là, par une nouvelle intégration,

$$(2) \qquad y = Cx + C_1, \quad z = C'x + C'_1;$$

ainsi la ligne demandée est une ligne droite.

La condition $\mathcal{G} = 0$ est

$$\begin{aligned} &(V_1 - Y'_1 y'_1 - Z'_1 z'_1)\,\delta x_1 + Y'_1\,\delta y_1 + Z'_1\,\delta z_1 \\ &- (V_0 - Y'_0 y'_0 - Z'_0 z'_0)\,\delta x_0 - Y'_0\,\delta y_0 - Z'_0\,\delta z_0 = 0, \end{aligned}$$

en employant les indices 0 et 1 pour représenter les valeurs que prennent aux limites les diverses quantités que nous considérons. Si l'on désigne par ds la différentielle de l'arc de la ligne demandée, compté à partir d'une origine quelconque, on pourra écrire

$$Y' = \frac{dy}{ds}, \quad Z' = \frac{dz}{ds} \quad \text{et} \quad V - Y'y' - Z'z' = \frac{dx}{ds};$$

la condition relative aux limites est donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right] \\ &- \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

848. Passons à la détermination des constantes. Si les extrémités de la ligne demandée sont données, les variations δx_0, δy_0, δz_0, δx_1, δy_1, δz_1 sont nulles et la condition (3) est satisfaite d'elle-même. Alors on déterminera les constantes C, C_1, C', C'_1 en exprimant que la droite représentée par les équations (2) passe par les deux points donnés (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1).

Si les extrémités ne sont pas données et que leurs coor-

données soient liées entre elles par i équations données, on différentiera ces équations avec la caractéristique δ, puis on éliminera i variations entre les équations obtenues et la formule (3); enfin on égalera à zéro les coefficients des $6 - i$ variations restantes. En tenant compte des i équations données et de celles qui expriment que la droite (2) passe par les points (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), on aura les dix équations nécessaires pour déterminer les coordonnées des extrémités et les constantes arbitraires.

Considérons, par exemple, le cas où les coordonnées x_0, y_0, z_0 sont indépendantes de x_1, y_1, z_1; l'équation (3) se décomposera en deux autres, savoir :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds_1}\delta x_1 + \dfrac{dy_1}{ds_1}\delta y_1 + \dfrac{dz_1}{ds_1}\delta z_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{dx_0}{ds_0}\delta x_0 + \dfrac{dy_0}{ds_0}\delta y_0 + \dfrac{dz_0}{ds_0}\delta z_0 = 0. \end{cases}$$

Supposons que l'extrémité (x_0, y_0, z_0) soit assujettie à demeurer sur une surface donnée ayant pour équation

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0}\delta z_0 = 0.$$

Si l'on élimine δx_0 entre cette équation et la deuxième équation (4), puis qu'ensuite on égale à zéro les coefficients de δy_0 et de δz_0, on aura

$$\frac{\dfrac{dx_0}{ds_0}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}} = \frac{\dfrac{dy_0}{ds_0}}{\dfrac{\partial F}{\partial y_0}} = \frac{\dfrac{dz_0}{ds_0}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_0}},$$

ce qui exprime que la ligne de longueur minima est normale à la surface donnée, résultat conforme à celui qu'on a obtenu au n° 157.

Si l'extrémité (x_0, y_0, z_0) est assujettie à rester sur une courbe donnée ayant pour équations

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0}\delta z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0}\delta z_0 = 0.$$

Les variations δx_0, δy_0, δz_0, dont ces équations déterminent les rapports, sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes la tangente à la courbe donnée au point (x_0, y_0, z_0); donc la deuxième équation (4) exprime que cette courbe donnée a pour normale la ligne de longueur minima.

Il est évident que ce qui précède s'applique à l'une et à l'autre des deux extrémités de cette ligne.

849. Au lieu d'appliquer les formules générales, on peut chercher directement les conditions du minimum de l'intégrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\, dx$$

en procédant comme nous l'avons indiqué au n° 836. On a

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta\, ds}{dx}\, dx \quad \text{ou} \quad \delta S = \int \delta\, ds.$$

Or l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ donne

$$ds\,\delta\, ds = dx\,\delta\, dx + dy\,\delta\, dy + dz\,\delta\, dz;$$

donc

$$\delta S = \int \left(\frac{dx}{ds}\, d\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\delta z \right),$$

ce qui devient, au moyen de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\delta S = &\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right]\\ &- \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right]\\ &- \int\left(\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds}\right).\end{aligned}$$

Les variations δx, δy, δz étant arbitraires sous le signe $\int$, celles des conditions du minimum qui déterminent les fonctions inconnues seront

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\frac{dz}{ds} = 0;$$

ces trois équations se réduisent à deux, et l'on en conclut, comme au numéro précédent,

$$\frac{dy}{dx} = \text{const.}, \quad \frac{dz}{dx} = \text{const.}$$

Nous nous dispensons d'écrire les conditions aux limites, qui sont évidemment celles que nous avons déjà obtenues.

850. Problème II. — *Trouver la ligne la plus courte entre deux points donnés sur une surface donnée.*

La ligne demandée est dite une ligne *géodésique*. Soient (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points donnés rapportés à trois axes rectangulaires, et

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface donnée.

Conservons toutes les notations du numéro précédent; la valeur obtenue pour δS convient au cas actuel, et les

conditions du minimum ou du maximum seront encore

$$(2)\qquad \delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1\right] \\ -&\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0\right]; \end{aligned}\right.$$

seulement les variations δx, δy, δz doivent ici satisfaire à l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Si l'on élimine δz entre les équations (2) et (4), puis qu'on égale à zéro les coefficients des variations restantes δx, δy, il viendra

$$(5)\qquad \frac{d\dfrac{dx}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d\dfrac{dz}{ds}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};$$

il est facile de voir que les deux équations contenues dans cette formule se réduisent à une seule, à cause des égalités

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = 0,$$

dont la seconde s'obtient en différentiant l'identité

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

La courbe cherchée sera donc déterminée par deux des trois équations (1) et (5). Les constantes introduites par l'intégration et les coordonnées $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$,

si elles sont variables, se détermineront ensuite, sans difficulté, en faisant usage des équations aux limites.

Les numérateurs des rapports (5) sont proportionnels aux cosinus des angles que fait, avec les axes, la normale principale de la ligne géodésique; d'ailleurs, les dénominateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que fait avec les mêmes axes la normale de la surface donnée; donc les deux normales coïncident, et l'on a ce théorème :

Le plan osculateur d'une ligne géodésique d'une surface est constamment normal à la surface.

La propriété d'être la ligne la plus courte entre deux points n'a pas nécessairement lieu pour tous les arcs d'une ligne géodésique. Ainsi, sur la sphère, les lignes géodésiques sont des grands cercles, et, si l'on prend deux points sur la circonférence de l'un de ces grands cercles, la propriété du minimum n'appartiendra qu'à l'arc inférieur à une demi-circonférence.

851. Problème III. — *Trouver la courbe plane qui passe par deux points donnés ou assujettis à des conditions données, et qui engendre une aire minima en tournant autour d'un axe donné dans son plan.*

Si l'on prend deux axes rectangulaires dans le plan de la courbe, dont l'un, celui des x, coïncide avec l'axe de rotation, l'aire dont on demande le minimum sera le produit par 2π de l'intégrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

On a donc, en se reportant aux formules générales du n° 833,

$$V = y\sqrt{1+y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = \sqrt{1+y'^2}, \quad Y' = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

L'équation

$$K = 0 \quad \text{ou} \quad Y - \frac{dY'}{dx} = 0$$

tombe dans l'un des cas du n° 843, et elle a pour intégrale première

$$V = Y'y' + c \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

c étant une constante arbitraire. On tire de là

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x-\alpha}{c} = \log\frac{y + \sqrt{y^2-c^2}}{c},$$

α étant une constante arbitraire. On peut écrire

$$\frac{y + \sqrt{y^2-c^2}}{c} = e^{\frac{x-\alpha}{c}}, \quad \frac{y - \sqrt{y^2-c^2}}{c} = e^{-\frac{x-\alpha}{c}},$$

d'où

$$y = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x-\alpha}{c}} + e^{-\frac{x-\alpha}{c}}\right],$$

ce qui est l'équation d'une chaînette.

L'équation aux limites $\mathcal{G} = 0$ est ici

$$(\delta x_1 + y'_1 \delta y_1) - (\delta x_0 + y'_0 \delta y_0) = 0;$$

elle servira pour la détermination des coordonnées x_1, y_1 et x_0, y_0, lorsque celles-ci seront variables.

Si les extrémités sont données, l'équation de la courbe suffira pour déterminer les constantes c et α; supposons, par exemple, que les ordonnées de ces extrémités soient égales, et prenons pour axe des y la perpendiculaire à l'axe menée à égale distance de ces deux points. On aura $x_1 = -x_0$; par suite, la constante α sera nulle, et l'on aura, pour l'équation de la courbe,

$$y = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right];$$

la constante c se déterminera donc par la condition

$$y_0 = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x_0}{c}} + e^{-\frac{x_0}{c}}\right].$$

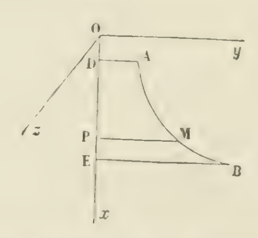
Si le rapport $\frac{y_0}{x_0}$ est inférieur à une certaine limite qu'on détermine aisément, la précédente équation n'a aucune racine réelle c; dans ce cas, il n'existe ni minimum ni maximum.

Lorsque les extrémités sont mobiles sur des courbes données, on a

$$\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 = 0, \quad \delta x_0 + y'_0 \delta y_0,$$

et l'on conclut facilement de là que la chaînette demandée est normale aux deux courbes données.

852. Problème IV. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *trouver la courbe* AMB *que doit suivre un point matériel pesant pour aller du point* A *au point* B *dans le temps le plus court.*



La courbe demandée est dite *brachistochrone*. Prenons trois axes rectangulaires dont l'un, celui des x, soit parallèle à la direction de la pesanteur, et désignons par (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points A et B. L'accélération due à la pesanteur étant désignée par g, et y', z' représentant comme à l'ordinaire les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, le temps employé par un corps pesant, par-

tant du repos, pour aller de A en B est égal, comme on le démontre en Mécanique, au produit de la constante $\sqrt{2g}$ par l'intégrale

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{x-x_0}}\, dx;$$

il s'agit de trouver les conditions du minimum de S. On a ici

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{x-x_0}}, \quad X = -\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{2(x-x_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y' = \frac{y'}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

puis

$$K = -\frac{dY'}{dx}, \quad H = -\frac{dZ'}{dx}.$$

Comme les points A et B sont donnés, les conditions du minimum seront ici

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

d'où

$$Y' = c, \quad Z' = c',$$

c et c' étant des constantes arbitraires. On a donc

$$y' = c\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2}, \quad z' = c'\sqrt{x-x_0}\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

d'où

$$z' = \frac{c'}{c} y';$$

intégrant et désignant par c'' une nouvelle constante arbitraire, on a l'équation

$$z = \frac{c'}{c} y + c'',$$

qui est celle d'un plan vertical contenant la courbe demandée. Ce plan passe par les deux points donnés, et, par conséquent, il est déterminé; on peut le prendre pour celui des xy, et alors on a $c' = 0$, $c'' = 0$, d'où $z = 0$, $z' = 0$, et

$$y' = c\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Résolvant par rapport à $y' = \frac{dy}{dx}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x - x_0}{\frac{1}{c^2} - (x - x_0)}},$$

ce qui est l'équation d'une cycloïde dont la base est horizontale (n° 231); on achèvera de déterminer cette courbe par la condition qu'elle passe par les points A et B; $\frac{1}{c^2}$ est ici le diamètre du cercle générateur.

853. Supposons maintenant que les extrémités A et B ne soient pas données, mais qu'elles soient assujetties à certaines conditions. L'équation

$$z = \frac{c'}{c} y + c''$$

a toujours lieu, et, par conséquent, la courbe demandée est encore située dans un plan vertical. Bien que ce plan soit inconnu, rien n'empêche d'y choisir deux axes pour y rapporter la courbe, et l'analyse du numéro précédent prouve que cette courbe est, dans tous les cas, une cycloïde.

Tout se réduit ici à déterminer les points extrêmes et le rayon du cercle générateur. L'équation aux limites $\mathcal{G} = 0$ est ici

$$\left[(V - Y'y' - Z'z')\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z\right]_0^1 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0}\, dx = 0.$$

Or on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -X,$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial x_0}\,dx = -X\,dx = (Y'\,dy' + Z'\,dz' - dV),$$

et, parce que Y' et Z' ont des valeurs constantes,

$$\frac{\partial V}{\partial x_0}\,dx = d(Y'y' + Z'z' - V);$$

notre équation devient donc

$$\Big[(V - Y'y' - Z'z')\,\delta x + Y'\,\delta y + Z'\,\delta z\Big]_0^1 - \Big[V - Y'y' - Z'z'\Big]_0^1 \delta x_0 = 0$$

ou, en remplaçant V, Y' et Z' par leurs valeurs,

$$\left[\frac{\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z}{\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]_0^1 \delta x_0 = 0.$$

Enfin, comme on a

$$\frac{1}{\sqrt{x - x_0}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{c}{y'} = \frac{c'}{z'},$$

si l'on désigne par λ la valeur commune de ces rapports, les produits $\lambda y'$ et $\lambda z'$ étant constants, on aura

$$\lambda_0 y'_0 = \lambda_1 y'_1, \quad \lambda_0 z'_0 = \lambda_1 z'_1,$$

et, par conséquent, l'équation de condition sera, après la suppression du facteur λ_1,

$$(\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1) - (\delta x_0 + y'_1\,\delta y_0 + z'_1\,\delta z_0) = 0.$$

Quelles que soient les conditions auxquelles les points extrêmes doivent satisfaire, on achèvera maintenant la solution sans difficulté. Supposons que chacun de ces

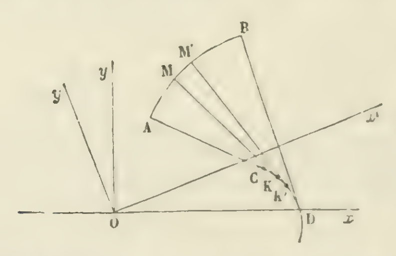
points soit assujetti à être sur une courbe donnée : on aura séparément

$$\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 + z'_1 \delta z_1 = 0,$$
$$\delta x_0 + y'_1 \delta y_0 + z'_1 \delta z_0 = 0,$$

d'où l'on conclut facilement que *la brachistochrone est normale à la courbe donnée qui passe par le point d'arrivée, et que la tangente de la seconde courbe donnée, au point de départ, est perpendiculaire à la tangente de la brachistochrone au point d'arrivée.*

854. Problème V. — *Trouver une courbe plane* AMB *telle que l'aire* ABCD, *comprise entre l'arc* AMB, *les rayons de courbure* AC *et* BD, *qui correspondent aux deux points extrêmes* A, B, *et l'arc de la développée* CD *compris entre les centres de courbure* C, D, *soit un minimum.*

Soient MK le rayon de courbure en un point M de l'arc AM $= s$, M'K' un rayon de courbure infiniment



voisin ; l'aire comprise entre ces rayons R et les deux courbes sera évidemment égale à $R\,ds(1+\varepsilon)$, ε étant un infiniment petit. Si donc on rapporte la courbe à deux axes rectangulaires Ox, Oy, l'intégrale, qui doit être un minimum, sera

$$S = \int_{x_0}^{x_1} R \frac{ds}{dx}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\, dx.$$

Ainsi l'on a

$$V = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}, \quad X = 0, \quad Y = 0;$$

on est donc dans l'un des cas du n° 846, et l'équation du minimum admet l'intégrale seconde

$$V = C - C'y' + Y''y'';$$

mais ici cette intégrale se réduit simplement à

$$V = C + C'y',$$

C et C' étant des constantes arbitraires, à cause de $Y''y'' = -V$. Remettant $R\frac{ds}{dx}$ au lieu de V, et $\frac{dy}{dx}$ au lieu de y', on aura, pour déterminer la courbe demandée,

$$R\frac{ds}{dx} = C + C'\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad R = C\frac{dx}{dx} + C'\frac{dy}{dx}.$$

Posons

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\varphi,$$

puis

$$C = 4a\cos\alpha, \quad C' = -4a\sin\alpha,$$

a et α étant de nouvelles arbitraires; notre équation deviendra

$$R = 4a\sin(\varphi - \alpha).$$

Mais, si l'on fait tourner les axes d'un angle α, et que l'on désigne toujours par φ l'inclinaison de la tangente de la courbe cherchée sur l'axe des x, on aura plus simplement

$$R = 4a\sin\varphi \quad \text{ou} \quad ds = 4a\sin\varphi\, d\varphi,$$

car $d\varphi$ est évidemment égal à l'angle de contingence. On

a ensuite

$$dx = ds\sin\varphi = 4a\sin^2\varphi\,d\varphi = 2a(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi,$$
$$dy = ds\cos\varphi = 4a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 2a\sin 2\varphi\,d\varphi,$$

d'où, en intégrant et en désignant par x_0, y_0 de nouvelles constantes arbitraires,

$$x - x_0 = a(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y - y_0 = a(1-\cos 2\varphi);$$

on voit que la courbe demandée est une cycloïde.

855. Problème VI. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et deux points* C, D *dans leur plan, on demande de trouver, parmi toutes les courbes de longueur donnée, situées dans ce plan et terminées aux points* C, D, *celle pour laquelle l'aire* ABCD *comprise entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées extrêmes, est un maximum.*

L'intégrale qu'il s'agit de rendre maxima est ici

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

et l'on doit avoir

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l,$$

l étant une longueur donnée. Il faut alors (n° 843) chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + a\sqrt{1+y'^2}\right) dx,$$

a étant une indéterminée. On a ici

$$V = y + a\sqrt{1+y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 1, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et l'on est dans le deuxième des cas du n° 846; l'équation du maximum admet l'intégrale première

$$V - y'Y' = c \quad \text{ou} \quad y + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

c étant une constante arbitraire. On tire de là

$$dx = \frac{(c - y)\,dy}{\sqrt{a^2 - (c - y)^2}},$$

d'où

$$x - c' = \sqrt{a^2 - (c - y)^2} \quad \text{ou} \quad (x - c')^2 + (y - c)^2 = a^2.$$

La courbe demandée est donc un arc de cercle de rayon a.

856. Problème VII. — *Parmi toutes les courbes isopérimètres que l'on peut tracer sur un plan entre deux points donnés, quelle est celle qui, en tournant autour d'une droite donnée dans le même plan, engendre la plus grande ou la plus petite surface de révolution?*

L'intégrale qui doit être maxima ou minima est

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

et l'on a, en outre,

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l;$$

il faut donc chercher le maximum ou le minimum absolu de

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y + a)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Comme a est une constante, le calcul à exécuter est le même que celui du problème III (n° 851), et, par con-

séquent, la courbe qui engendre la plus grande ou la plus petite surface est une chaînette.

857. PROBLÈME VIII. — *Parmi toutes les courbes isopérimètres, quelle est celle à laquelle répond le volume de révolution minimum?*

L'intégrale qui doit être un minimum est

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx,$$

et l'on a, comme dans les précédents problèmes,

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

Il faut chercher le minimum absolu de

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} \left(y^2 + a\sqrt{1+y'^2}\right) dx.$$

On a

$$V = y^2 + a\sqrt{1+y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 2y, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

par conséquent, on aura, comme dans le problème VI,

$$V - y'Y' = c$$

pour l'intégrale première de l'équation différentielle qui exprime la condition du minimum, c'est-à-dire

$$y^2 + \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

ou

$$dx = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{a^2 - (y^2 - c)^2}},$$

ce qui est l'équation différentielle de la *courbe élastique* (nº 709).

858. Problème IX. — *Déterminer la courbe plane qui, en tournant autour d'un axe situé dans son plan, engendre la surface minima renfermant un volume donné.*

L'intégrale qui doit être minima est

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

et l'on a

$$S' = \int^{x_1} y^2\,dx = \text{const.} = l.$$

Nous chercherons le minimum absolu de l'intégrale

$$2aS + S' = \int_{x_0}^{x_1} \left(y^2 + 2ay\sqrt{1+y'^2}\right)dx,$$

a étant une indéterminée. On a

$$V = y^2 + 2ay\sqrt{1+y'^2}, \quad X = 0,$$

et l'on aura ici encore, pour l'intégrale de l'équation qui répond au minimum,

$$V - y'Y' = \pm b^2$$

ou

$$y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm b^2,$$

b étant une constante arbitraire. On tire de là

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Cette équation n'est autre que celle dont nous nous sommes occupé au n° 712, et qui appartient à la courbe décrite par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule, sans glisser, sur une droite fixe située dans son plan.

FIN DU TOME SECOND.

[illegible] Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.


P&A Sci

